

APÉNDICE 2

NOCIONES DE RELATIVIDAD

Veremos solo algunas consecuencias de la Teoría de la Relatividad Restringida relacionadas con la Astronomía, que son interesantes y además fundamentales para la comprensión de varios fenómenos, como la radiación de sincrotrón y el efecto Doppler cósmico. Los detalles de rigor no serán tenidos en cuenta en nuestro desarrollo a fin de hacer más fácil la transmisión del concepto básico.

Dilatación del Tiempo

Uno de los hechos demostrados por la Relatividad es la dilatación que sufre el tiempo en los sistemas inerciales móviles, cuando es medido desde otro en reposo.

Primero debemos definir sistema inercial como aquél en donde no se advierte la existencia de fuerzas, v.g. aceleraciones.

Un sistema inercial se moverá (o permanecerá en reposo) con movimiento rectilíneo y uniforme (velocidad constante) respecto a cualquier otro sistema inercial. En nuestro desarrollo nosotros consideraremos un sistema en reposo y otro móvil con velocidad v , a lo largo de la componente x .

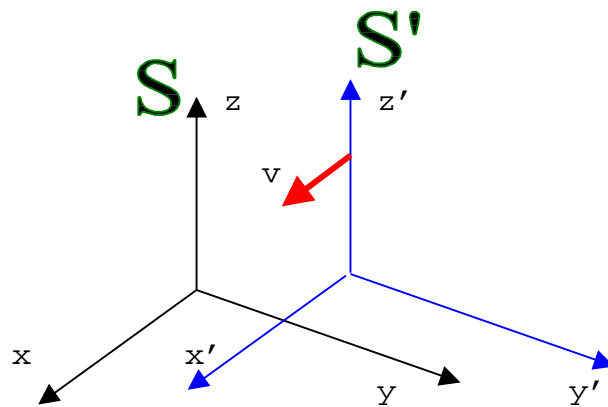
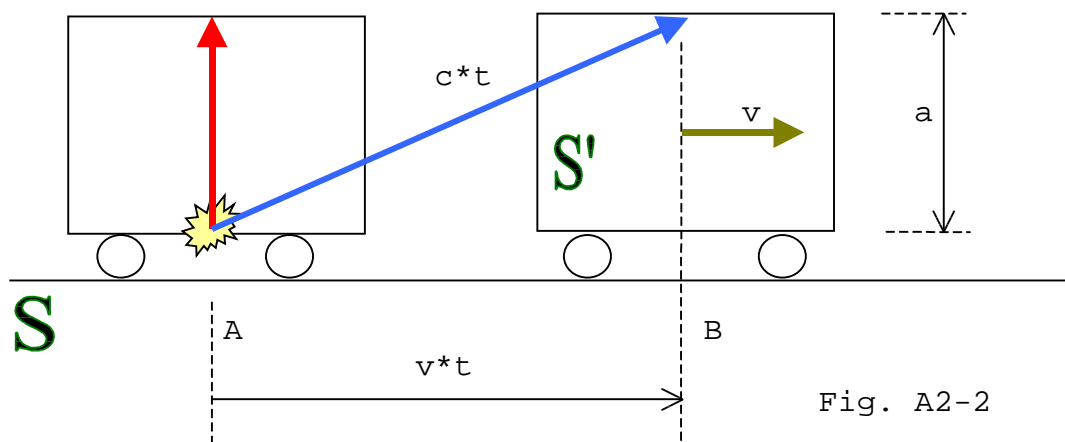


Fig. A2-1

Uno de los postulados más importantes de la Relatividad establece que la velocidad de la luz es la misma en cualquier sistema inercial.

Calcularemos qué sucede en un experimento que realizaremos en el vagón de un tren (sistema móvil) que se desplaza frente a nosotros (sistema fijo), que esperamos en el andén.



Cuando el vagón pasa por el punto A, se destella un flash en el piso del mismo. Para un pasajero (sistema móvil), la luz del flash se moverá directamente hacia arriba y tocará el techo luego de un tiempo

$$S') \quad t' = \frac{a}{c} \quad \rightarrow a = c * t'$$

donde a: altura del vagón

c: velocidad de la luz

t': Tiempo que tarda la luz en tocar el techo medido por el pasajero (tiempo en el sistema móvil)

Pero para el observador del andén, la luz recorrerá un camino más largo antes de tocar el techo = c*t.

Luego, por Pitágoras, desde el sistema en reposo (andén) podemos escribir

$$S) \quad (c*t)^2 = (v*t)^2 + a^2$$

ordenando

$$(c^2 - v^2)*t = a^2$$

$$\text{despejamos } t = \frac{a}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

al valor de a lo reemplazamos por la primera ecuación

$$t = \frac{c * t'}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{t'}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{t'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$t = t' * \gamma$$

donde β : Relación entre la velocidad del vagón y c . ($\beta = \frac{v}{c}$)

γ : Factor multiplicador que aparece frecuentemente en las ecuaciones de relatividad y también representa a una forma de definir la velocidad de un cuerpo respecto a la de la luz.

La última expresión nos está diciendo que el intervalo de tiempo entre dos sucesos -disparo del flash y la llegada de la luz al techo- no son iguales si se lo mide dentro del vagón en movimiento (t') o desde el andén (t). El valor de γ es siempre mayor que 1, por lo que t será mayor a t' . Esto hará que los sucesos que ocurran dentro del vagón en movimiento parecerán lentos cuando se los observa desde el andén.

Es necesario aclarar que esta lentitud calculada no es causada por demoras en la llegada de la luz, que transmite la información desde el interior del vagón hasta el andén. La lentitud calculada es una dilatación del tiempo real, a la que habrá que sumar las deformaciones que sufrirán la sucesión de hechos del vagón vistos desde el andén por tardanzas de la luz desde el vagón al andén. Esto es muy importante.

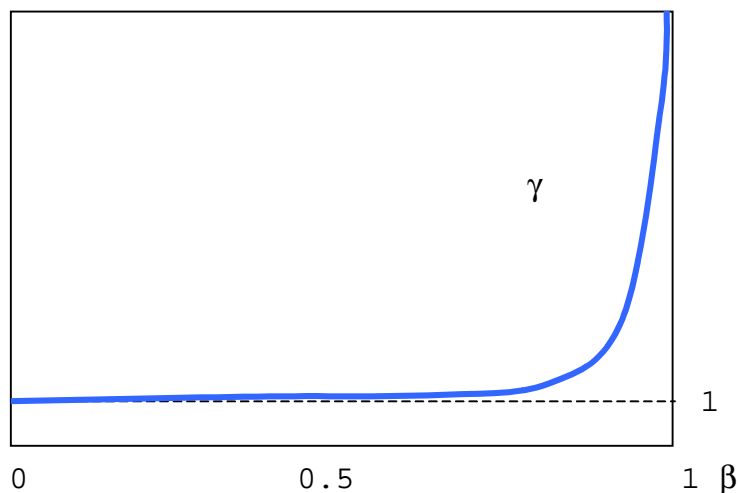


Fig. A2-3 El valor de γ parte valiendo +1 cuando la velocidad es cero y termina en infinito cuando la velocidad es c . ($\beta=1$)

Es interesante calcular el valor de γ para una lámpara de flash que está en movimiento. Cuando se dispara el flash se produce un frente de onda que sale del punto de disparo hacia todas las direcciones formando una cáscara esférica. Pero mientras la esfera se expande, el flash se mueve como persiguiendo al frente de onda. Vamos a dibujar la posición del flash y del frente de onda, luego de un segundo del disparo, para varias velocidades de movimiento del flash

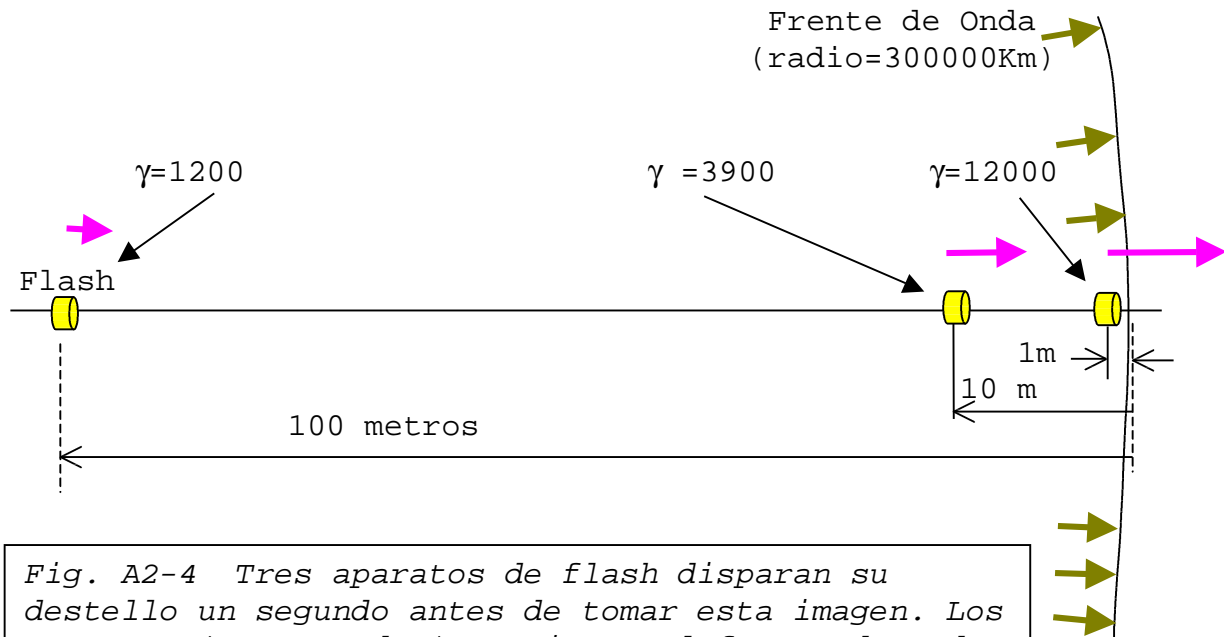


Fig. A2-4 Tres aparatos de flash disparan su destello un segundo antes de tomar esta imagen. Los aparatos (ya apagados) persiguen al frente de onda y cada uno se acerca a él, según su velocidad v , quedando a las distancias indicadas.

En los casos donde intervienen partículas a altas velocidades este valor de γ toma verdadera importancia en la determinación de los fenómenos que ocurren.

Contracción de Lorentz

Cualquier cuerpo que se desplace respecto a un sistema fijo sufre una contracción en sus dimensiones solo en la dirección de su movimiento. Es necesario prestar atención en la forma en que se debe medir el cuerpo móvil desde el sistema en reposo.

Pongamos nuevamente el caso del vagón en movimiento. Si el pasajero del vagón mide el largo del vagón con una cinta métrica obtendrá un valor numérico determinado. Desde el andén, deberemos medir el vagón cuando pasa velozmente frente a nosotros, determinando las posiciones de ambos extremos del vagón SIMULTÁNEAMENTE. La longitud del vagón en movimiento, medida desde el sistema en reposo, será la distancia entre esas posiciones. La simultaneidad en la medición es fundamental. Cuando comparemos las medidas reposo-movimiento, veremos que el vagón sufrió una contracción longitudinal que será mayor cuanto más grande sea su velocidad.

Para demostrarlo vayamos al vagón y el flash.

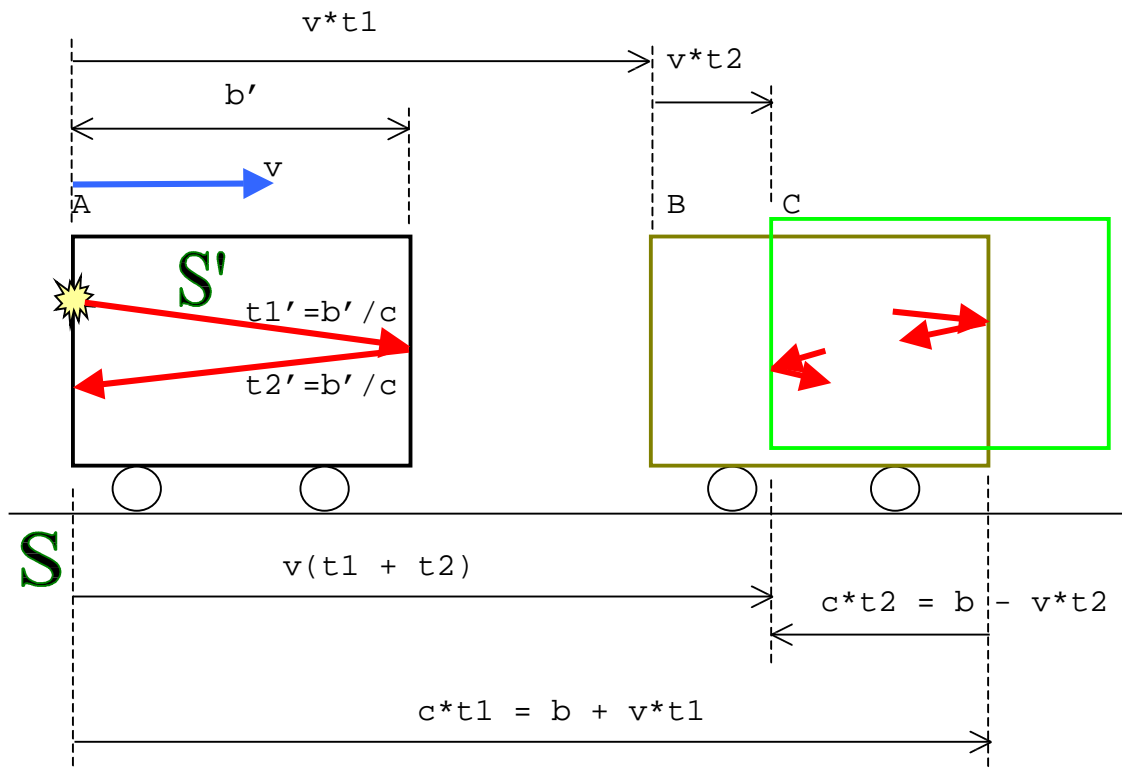


Fig. A2-5

En el dibujo vemos al vagón en tres posiciones de su carrera A, B y C, correspondientes a tres eventos: Disparo del flash, llegada de la luz a la pared frontal del vagón y llegada de la luz a la pared posterior luego del rebote en la pared frontal.

Para el pasajero del vagón (sistema móvil, S'), los dos recorridos de la luz son idénticos, pudiendo decirse que

$$S') \quad t1' = t2'$$

$$t1' + t2' = 2 \frac{b'}{c}$$

como se aclara en la posición del vagón de la izquierda, siendo b' el largo del vagón medido por el pasajero que está en reposo respecto al vagón. La medida del vagón hecha desde el andén (sistema en reposo, S) es designado como b .

Desde el sistema S , los tiempos tomados por la luz entre los tres eventos, no son iguales

$$S) \quad t1 \neq t2$$

$$v(t1 + t2) = c(t1 - t2) \quad (\text{ver dibujo})$$

$$\text{pero } \begin{cases} c*t1 = b + v*t1 & \text{--->} t1 = \frac{b}{c-v} \\ c*t2 = b - v*t2 & \text{--->} t2 = \frac{b}{c+v} \end{cases}$$

reemplazando $t1$ y $t2$ en el segundo miembro de la ecuación de arriba

$$\begin{aligned} v(t1 + t2) &= c \left(\frac{b}{(c-v)} - \frac{b}{(c+v)} \right) = \\ &= b*c \left(\frac{c+v-(c-v)}{c^2 - v^2} \right) = \frac{2 \quad b*c*v}{c^2 - v^2} \end{aligned}$$

operando

$$t_1 + t_2 = \frac{2 b \cdot c}{c^2 - v^2} = \frac{2 b}{c (1 - v^2/c^2)} =$$

$$= \frac{2 b}{c (1 - \beta^2)} = \frac{2 b}{c} \gamma^2$$

por otro lado, debido a la dilatación del tiempo vista en el apartado anterior

$$(t_1' + t_2') \gamma = t_1 + t_2$$

$$(t_1' + t_2') \gamma = \left(\frac{2 b'}{c} \right) \gamma$$

entonces

$$\frac{2 b'}{c} \gamma = \frac{2 b}{c} \gamma^2$$

simplificando

$$b = \frac{b'}{\gamma}$$

lo que significa que el largo del vagón medido por el pasajero (b'), cuando se lo mide desde un sistema en reposo (S) se nota un acortamiento de la dimensión (debido a que el valor de γ siempre es mayor que 1) Este acortamiento es llamado contracción de Lorentz, y es una verdadera contracción del espacio.

Esta contracción del espacio mismo que rodea a una carga eléctrica es la causante de la existencia de los campos magnéticos.

Cuando una carga (puede ser un electrón) está en reposo, el campo eléctrico a su alrededor es isotrópico y radial, y responde a la Ley de Coulomb, que especifica el valor del campo eléctrico alrededor de la carga en función a la

distancia a la misma. En esta ley, el campo solo depende de la distancia y no de la dirección.

$$E = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r^2}$$

donde q: valor de la carga eléctrica (Coulomb)

ϵ_0 : constante dieléctrica del vacío ($8.85 \cdot 10^{-12}$ Farad/m)

r: distancia de la carga al punto de observación (m)

E: campo electrostático (Newton/Coulomb)

Las líneas de fuerza, que emanan radialmente de la carga, se reparten uniformemente alrededor de ella

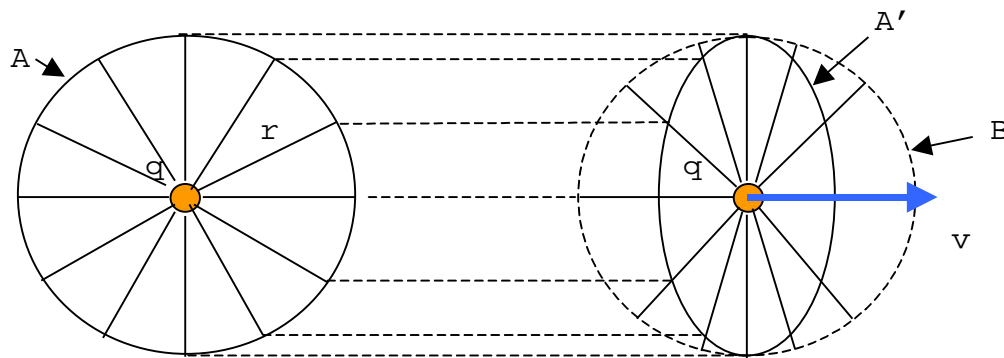


Fig. A2-6

Estático

En movimiento

Las líneas de fuerza por unidad de superficie que intersectan la esfera A, da una medida del valor del campo eléctrico producido por la carga a la distancia r.

Sin embargo, cuando la carga se mueve, todo el espacio que rodea la carga y su volumen de influencia contraen la dimensión coincidente a la dirección del movimiento. La esfera A se convierte en la elipsoide A', y las líneas de fuerza se desvían, apretándose hacia el plano "ecuatorial" al movimiento, y se expanden en dirección de él. Si el campo se vuelve a medir desde el sistema en reposo que usa la esfera B, la cantidad de líneas por unidad de superficie denotan este efecto. En consecuencia, el campo ecuatorial aumenta

$$E_{ec} = E_o * \gamma$$

donde E_{ec} : Campo eléctrico ecuatorial (movimiento)

E_o : Campo eléctrico en reposo

γ : Factor relativístico (>1)

y el campo axial disminuye

$$E_{ax} = \frac{E_o}{\gamma^2}$$

de forma tal que la integral de superficie del flujo de E cumple la primera ley de Maxwell.

VIAJE SOBRE UNA CUADRÍCULA

Es interesante aquí agregar un fenómeno curioso que es causado en parte por la contracción de Lorentz y por otro por la relativa lentitud que tiene la luz cuando se trata de distancias astronómicas o velocidades relativistas.

Supongamos que una nave sobrevuele un terreno marcado con una cuadrícula o grilla, igualmente espaciada.

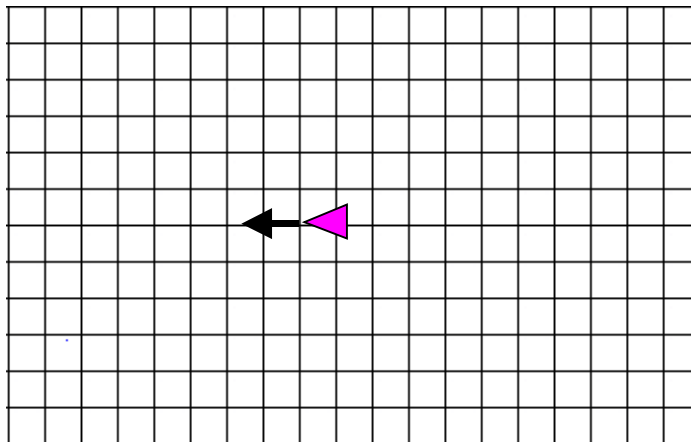
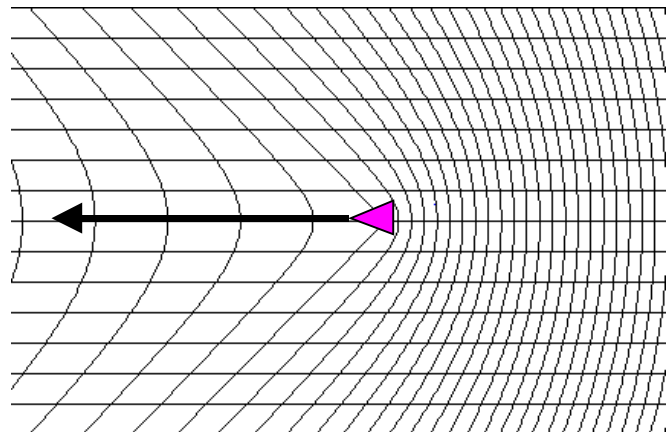


Fig. A2-7 Una nave comienza a volar en vuelo rasante sobre un terreno cuadriculado

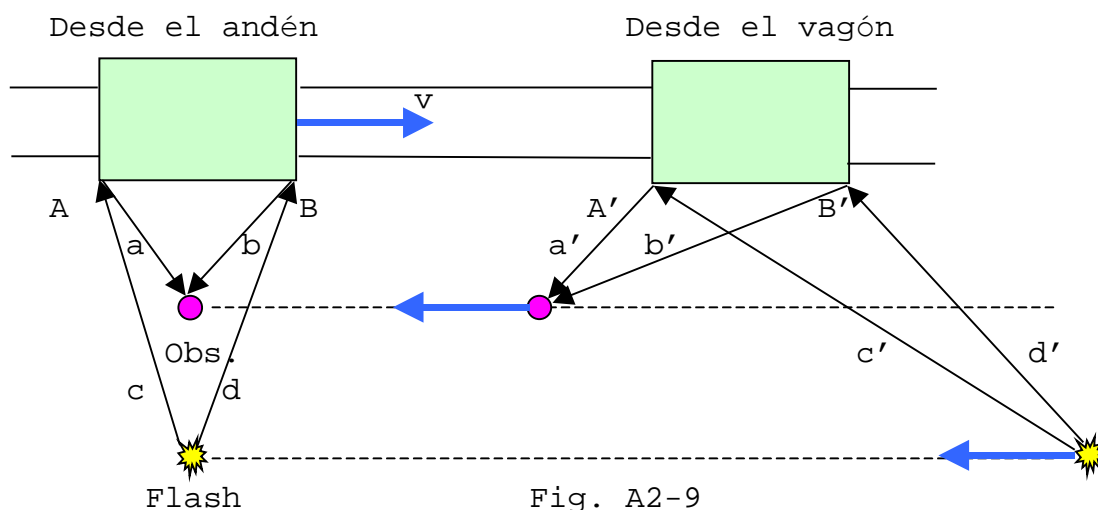
Fig. A2-8 La nave tomó suficiente velocidad como para llegar a $b = 0.7$, un 30% menos que la velocidad de la luz. La grilla, vista desde la nave presenta distorsiones notables.



Cuando la nave se mueve lentamente sobre la grilla, no parece notarse ninguna anomalía. Sin embargo, cuando la nave toma velocidades comparables a c , los objetos delante de la nave parecen estar más lejanos y se acercan a una gran velocidad. Por otro lado, los objetos que quedan atrás parecen hacerlo lentamente. Además, las líneas transversales al movimiento se curvan notablemente.

SIMULTANEIDAD

En relatividad, dos eventos *separados por una distancia* que se comprueban simultáneos en un sistema inercial, no lo son en otro que se mueva respecto al primero. Volvamos al experimento del vagón.



A la izquierda vemos el vagón desde el andén. Cuando pasa frente a nosotros se dispara el flash y el observador ve el rebote simultáneo en ambos extremos del vagón, pues los caminos $c+a$ y $d+b$ son iguales. Además, los caminos de la luz c y d son también iguales, haciendo que la luz llegue simultáneamente a los dos puntos distantes A y B.

Sin embargo, cuando observamos desde el vagón, vemos que el disparo del flash llega primero a B' que a A'. Son dos eventos distantes no simultáneos. Asimismo, las sumas de caminos $c'+a'$ y $d'+b'$ son iguales, lo que hace que la llegada de la luz al observador se produzca simultáneamente, por lo que el observador sigue viendo el rebote en forma simultánea. La simultaneidad está garantizada aquí por ser la llegada de la

luz desde dos puntos distintos A' y B' al mismo observador, dos eventos no distantes.

EFECTO DOPPLER RELATIVÍSTICO

En otro capítulo hemos visto la explicación del efecto Doppler normal, es decir, para velocidades mucho menores a la velocidad de la luz c .

Ahora veremos como se extiende este efecto a velocidades cercanas a c , que son las que se encuentran en algunos no muy comunes objetos astronómicos, como son los jets que aparecen proyectados desde regiones donde se produce caída de material gaseoso sobre algún objeto de gran densidad (como estrellas de neutrones o incluso agujeros negros). Estos jets de material ionizado se dan en algunas galaxias llamadas de núcleo activo, entre las cuales están las galaxias Seyfert, los quasars, etc.

La diferencia entre el efecto Doppler relativístico con el normal reside en la consideración de la dilatación del tiempo que aparece en todo cuerpo que se mueve a β cercanos a la unidad.

Llamamos T al período (tiempo) de una onda emitida por el cuerpo móvil (no confundir con la temperatura absoluta).

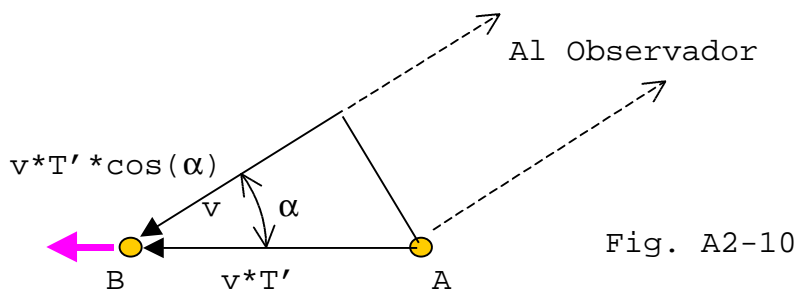


Fig. A2-10

El cuerpo se desplaza desde A hasta B en un período durante el cual emite toda una onda. Si estuviera estacionario, este tiempo sería T . Sin embargo, debido a su velocidad, se produce la conocida dilatación del tiempo, lo que trae como consecuencia que este período, percibido desde nuestro observador en reposo, se dilate a T' .

$$T' = \gamma * T$$

La longitud de onda de la radiación que llega al observador será modificada por la expansión (o compresión) de las ondas propias del efecto Doppler

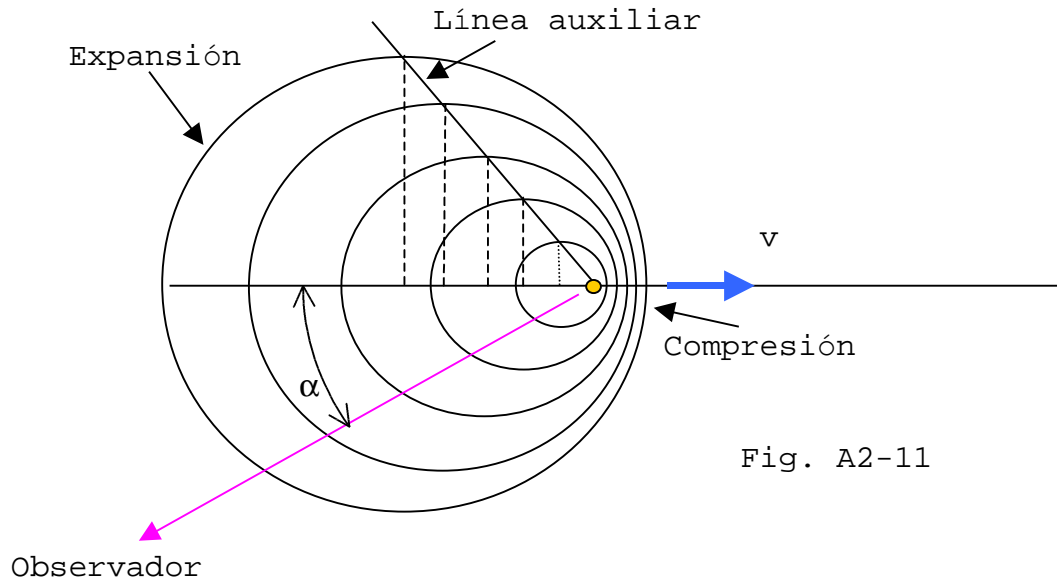


Fig. A2-11

La longitud de onda modificada será entonces

$$\lambda' = c T' + v T' \cos(\alpha) = \gamma T [c + v \cos(\alpha)]$$

de donde

$$\lambda' = \frac{\lambda_0}{c} [c + v \cos(\alpha)] = \lambda_0 \gamma \left[1 + \frac{v}{c} \cos(\alpha) \right]$$

La longitud de onda λ_0 es la que se percibiría el observador si el cuerpo estuviera en reposo

sabiendo que $\frac{v}{c} = \beta$

Por otro lado la definición del desplazamiento al rojo z es

$$z = \frac{\lambda' - \lambda_0}{\lambda_0}$$

por lo que

$$z + 1 = \frac{\lambda'}{\lambda_0} = \gamma [1 + \beta \cos(\alpha)]$$

$$\text{con } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 + \beta)(1 - \beta)}}$$

Dentro de todo el rango de variación de α (360°) existen dos casos especiales: Uno, es que el cuerpo se esté acercando directamente al observador y otro, es que se esté alejando.

Caso de acercamiento:

aquí el $\cos(\alpha) = -1$ lo que da un resultado

$$z+1 = \frac{1 - \beta}{\sqrt{(1 + \beta)(1 - \beta)}}$$

$$z+1 = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \quad \underline{\text{Acercamiento}}$$

Caso de alejamiento:

Ahora $\cos(\alpha)=+1$ lo que causa que

$$z+1 = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \quad \underline{\text{Alejamiento}}$$

Doppler Transversal

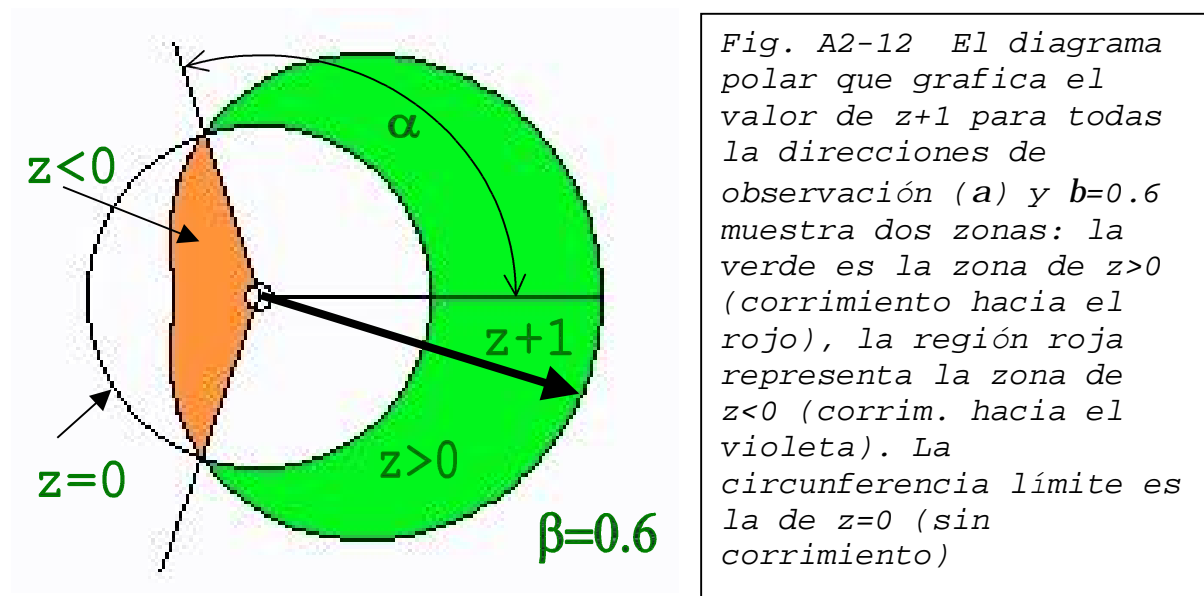
Un caso, muy poco mencionado en la literatura, es el Doppler transversal. A pesar de que si un cuerpo se desplaza con dirección perpendicular al radiovector del observador, éste detectará, de todos modos, un *corrimiento hacia el rojo*. Este corrimiento puede confundirse con una velocidad radial, lo que, por supuesto, sería incorrecto.

El Doppler transversal debe toda su existencia a la dilatación relativística del tiempo.

En este caso $\cos(\alpha) = 0$ así

$$z+1 = \gamma$$

Transversal



El diagrama polar de la Fig. A2-12 también muestra el doppler transversal (cuando $\alpha=90^\circ$)

Es notable como varían los valores de $z+1$ cuando b toma valores elevados.

El gráfico que sigue muestra el diagrama polar correspondiente a tal velocidad.

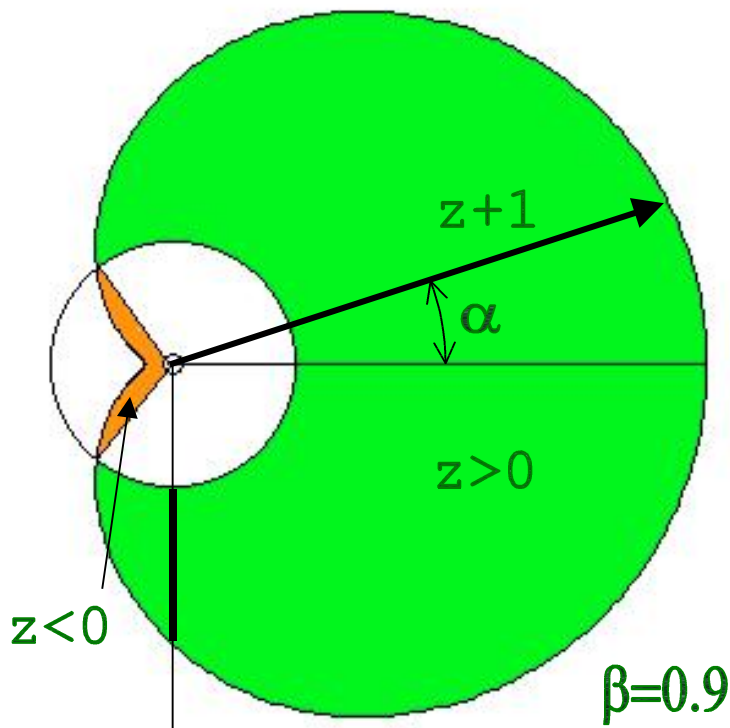


Fig. A2-13 Aquí se ve como cambia el diagrama polar de los corrimientos al rojo ($z+1$) en función del ángulo de observación. En la parte inferior está destacado el doppler transversal para ángulos de 90° y 270° y que son debidos enteramente al efecto de dilatación del tiempo relativista.

Desplazamiento hacia el rojo

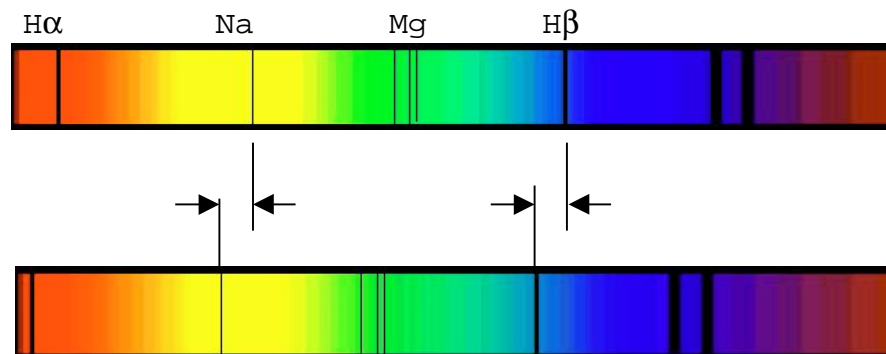


Fig. A2-14 Dos espectros generados por computadora, mostrando, el de arriba, las posiciones de las líneas de absorción importantes de una estrella en reposo. El de abajo, las líneas desplazadas al rojo por efecto Doppler.

MODIFICACIÓN DE LA INTENSIDAD DE RADIACIÓN

Otro efecto interesante es la modificación de la Intensidad de Radiación producido por la compresión y expansión entre frentes de onda consecutivos en un emisor en movimiento.

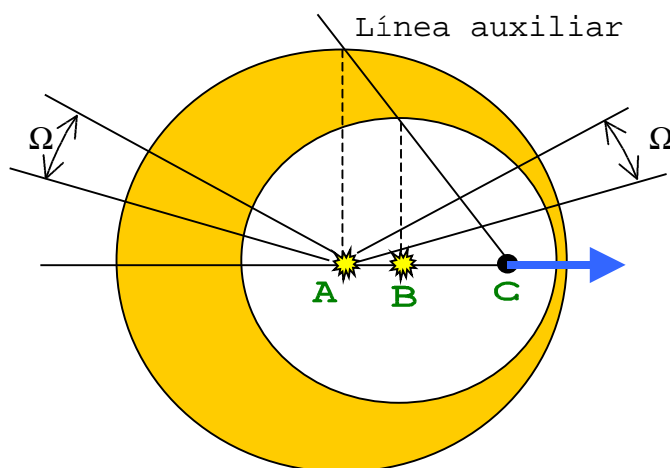


Fig. A2-15 Un cuerpo emite energía desde A hasta B y se apaga. La posición actual es C. El volumen por unidad de ángulo sólido del espacio entre frentes de onda se comprimirá hacia adelante.

Si el cuerpo emite isotrópicamente (potencia por unidad de ángulo sólido constante), la distancia entre el frente de onda inicial y el final será variable por efecto Doppler. La consecuencia es que la densidad de energía volumétrica se multiplicará en la dirección del movimiento y se reducirá en la dirección opuesta.

Para el caso de electrones en movimiento circular, si el valor de $\beta \sim 0$ (velocidades bajas, no relativistas) la Intensidad de Radiación no es isotrópica. El diagrama de radiación en este caso es una rosca con el agujero central de diámetro = 0.

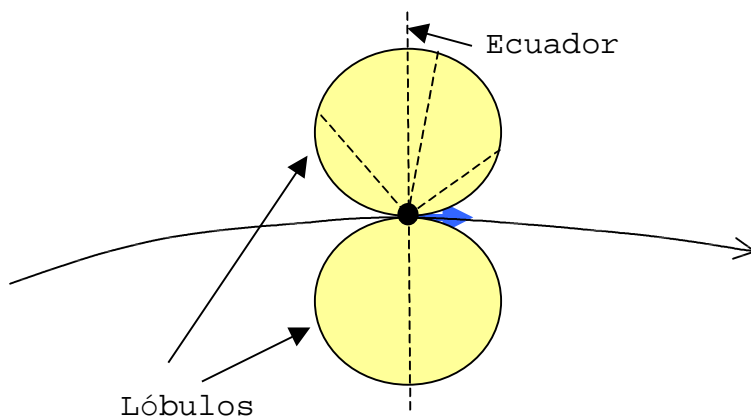


Fig. A2-16 Un electrón en lento movimiento circular uniforme irradia potencia cuyo máximo está en el "ecuador" del movimiento y cero en el sentido del mismo

Cuando el movimiento es relativístico ($\beta \sim 1$) la multiplicación de la densidad de energía volumétrica que se produce en la parte delantera de la carga móvil por acción del doppler modifica los lóbulos de radiación en forma muy sustancial concentrando fuertemente la emisión de energía dentro de un cono de pequeña abertura, relacionado con el número relativístico γ .

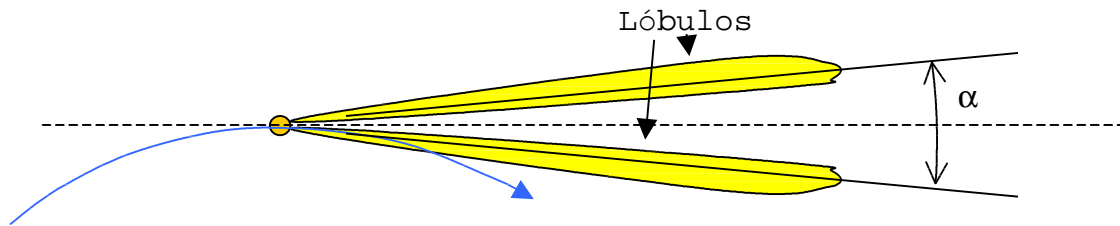


Fig. A2-17 Cuando una carga describe una trayectoria circular a velocidades relativísticas, la emisión de energía electromagnética se confina a un cono de abertura α , determinada por el valor del γ correspondiente.