

La expresión matemática que define el ancho de las franjas nos dice que éste será mayor para valores de θ cercanos a $\pm 90^\circ$.

Como consecuencia, tanto el ancho de las franjas como su ángulo de posición irá cambiando paulatinamente a lo largo del seguimiento que las antenas mantienen sobre la radiofuente observada.

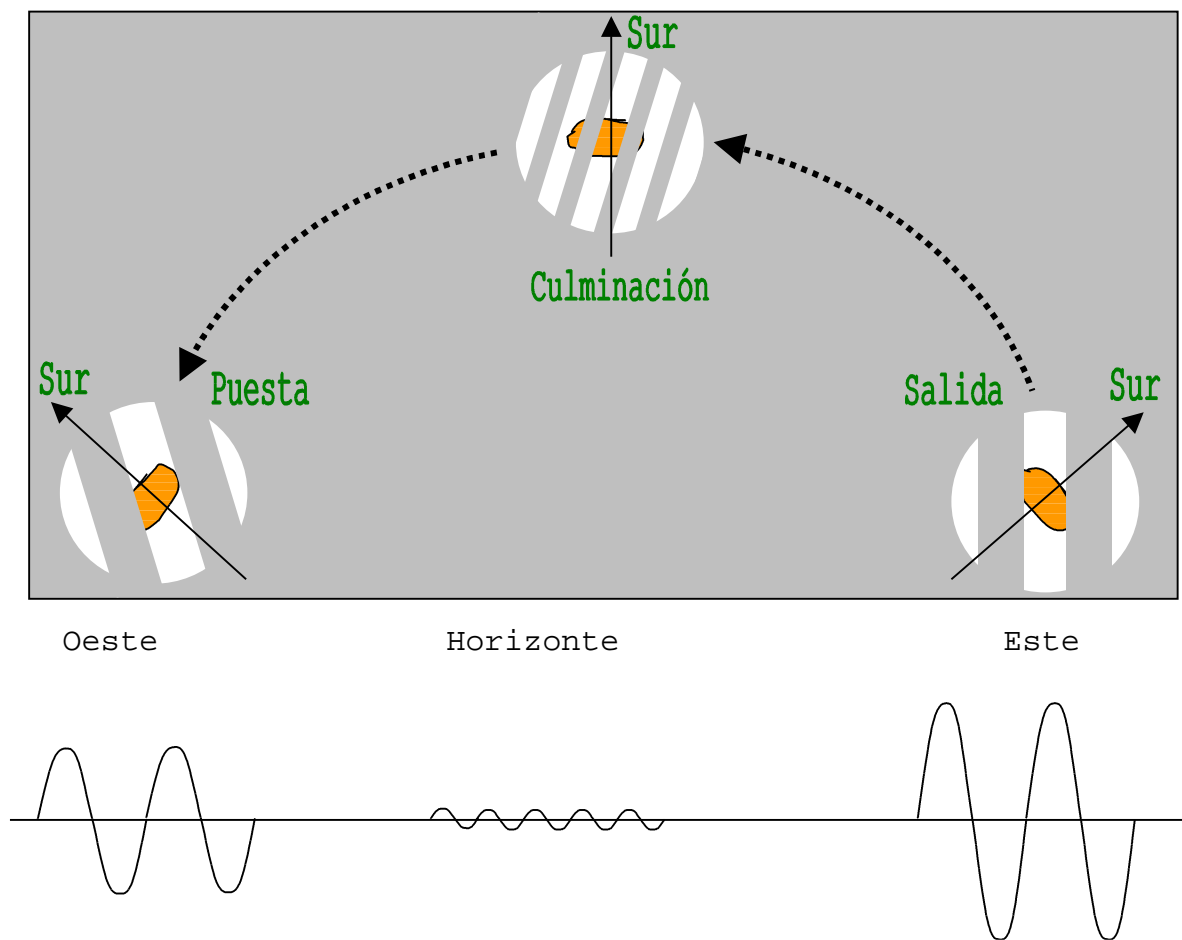


Fig. 5-20 El ángulo de posición de las franjas es el ángulo entre la dirección Norte-Sur y las franjas, y cambia durante el tránsito de la radiofuente, desde que sale sobre el horizonte, por el Este, hasta su puesta, por el Oeste.

Se hace necesario, entonces, conocer el valor y la orientación de la proyección (a') de la Línea de Base (a) a lo largo de la trayectoria por el cielo de la radiofuente, para conocer el ancho de las franjas y su ángulo de posición.

La dirección de las franjas es perpendicular a la dirección de la proyección a' del mismo modo que era con respecto a la Línea de Base (a).

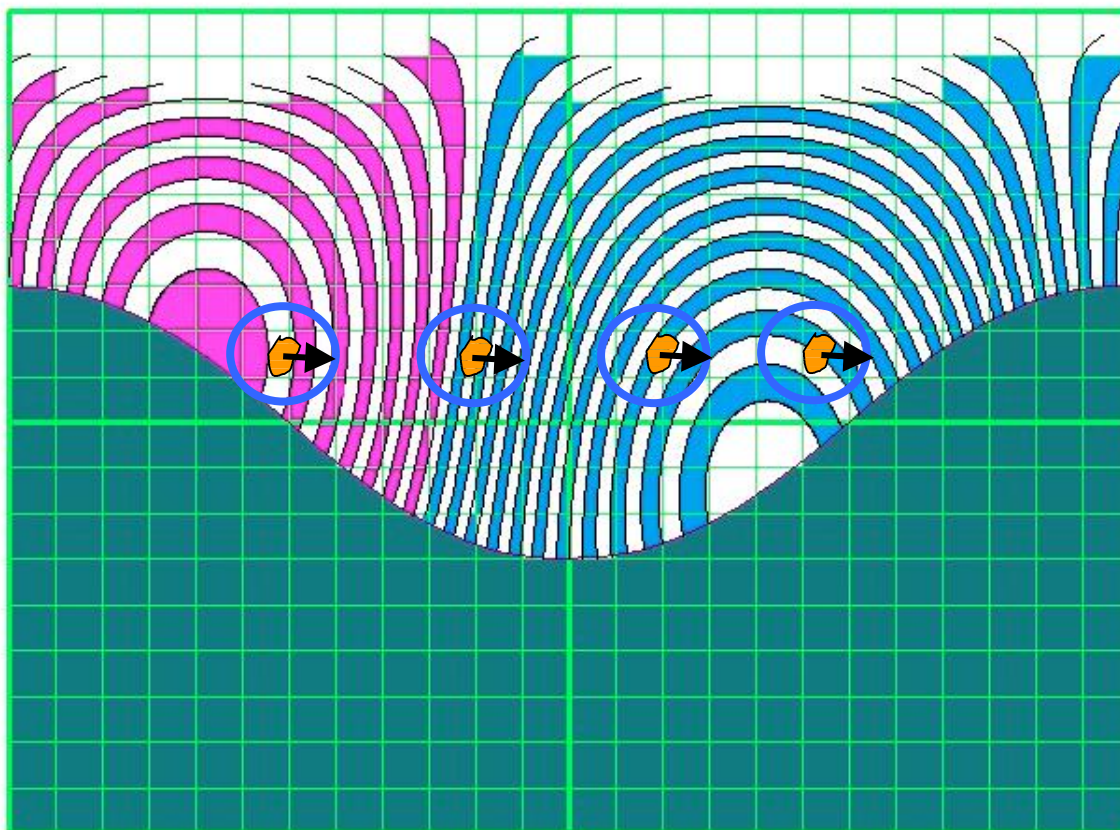
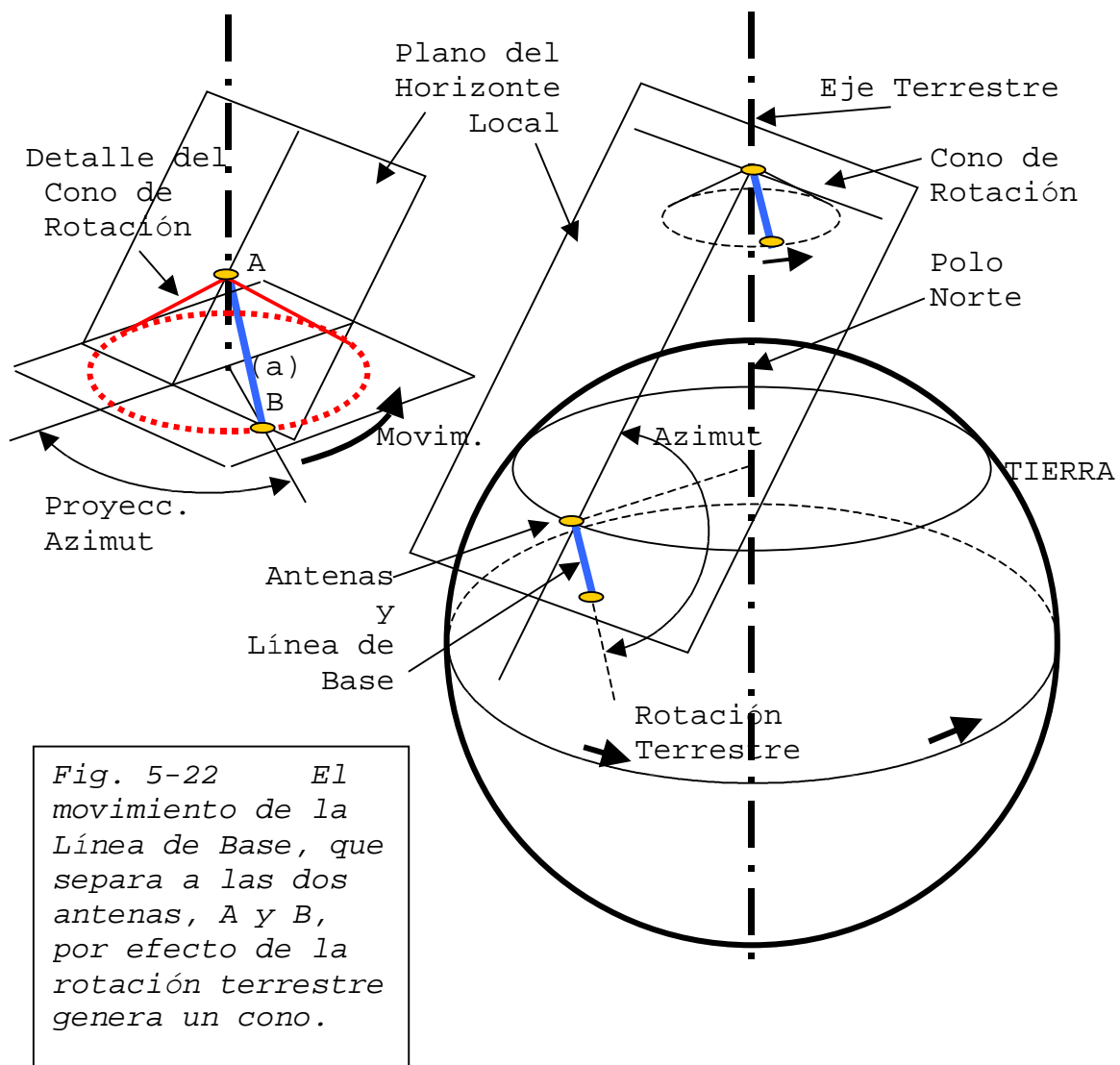


Fig. 5-21 En esta proyección Mercator, vemos, en coordenadas ecuatoriales, el detalle de las franjas que aparecen en el cielo por la instalación de un interferómetro de 2 antenas de Línea de Base 9 l, colocado en un lugar del planeta con una latitud de $+60^\circ$, y alineadas en un azimut de -60° , (equivalente a 4 horas). La porción oscura inferior es el cielo del sur inalcanzable desde esa localidad. El interferómetro sigue una radiofuente, que sale por el Este y se pone detrás del horizonte Oeste. Es interesante notar el ensanchamiento de las franjas hacia los "Polos". Éstos se sitúan en la intersección de la prolongación de la Línea de Base con la esfera celeste. En este diagrama se puede apreciar el ángulo de posición de las franjas para cada punto del cielo accesible. Los círculos azules que rodean la fuente representan el campo abarcado por las antenas.



En el gráfico, la antena A es la referencia. Las antenas están situadas sobre el plano del Horizonte Local. Para facilitar la comprensión de su movimiento, conviene llevar la Línea de Base, paralelamente a sí misma, hasta el eje terrestre, haciendo coincidir la antena A con él. Con la rotación terrestre, la antena B describirá una circunferencia haciendo que la Línea de Base genere un Cono de Rotación. El ángulo de apertura de ese cono depende de la latitud del lugar y del azimut de orientación de la Línea de Base. Si las antenas estuvieran orientadas Este-Oeste (azimut=90° ó 180°) el cono degeneraría en un círculo plano. Según como se instalen las antenas en el piso, su azimut podrá valer de 0° a 360° (ver Fig. 5-32).

Los resultados que se obtienen de un interferómetro son la amplitud y la fase de la señal oscilante de salida del mismo durante todo el tiempo en que se sigue a una radiofuente. Pero para interpretar esta observación y convertirla en una imagen, debemos conocer previamente con precisión la ubicación de las franjas en el cielo. Además muchas radiofuentes salen y se ponen detrás del horizonte (salvo las circumpolares), así que también nos convendrá conocer la **accesibilidad** que tenemos de ellas: Cuantas horas del las 24 del día están al alcance de nuestro interferómetro.

Todo esto se resume en conocer los detalles de la proyección de la Línea de Base (a) sobre el Frente de Onda; segmento que llamamos a', a lo largo de toda la rotación terrestre. Este trabajo se consigue proyectando el cono generado por la rotación de la Línea de Base, sobre el plano del Frente de Onda. Solo hará falta conocer la declinación de la radiofuente y las características del cono de rotación.

Por otro lado, la proyección del ángulo del azimuth sobre el plano del ecuador nos permite determinar los intervalos de **accesibilidad** de la radiofuente.

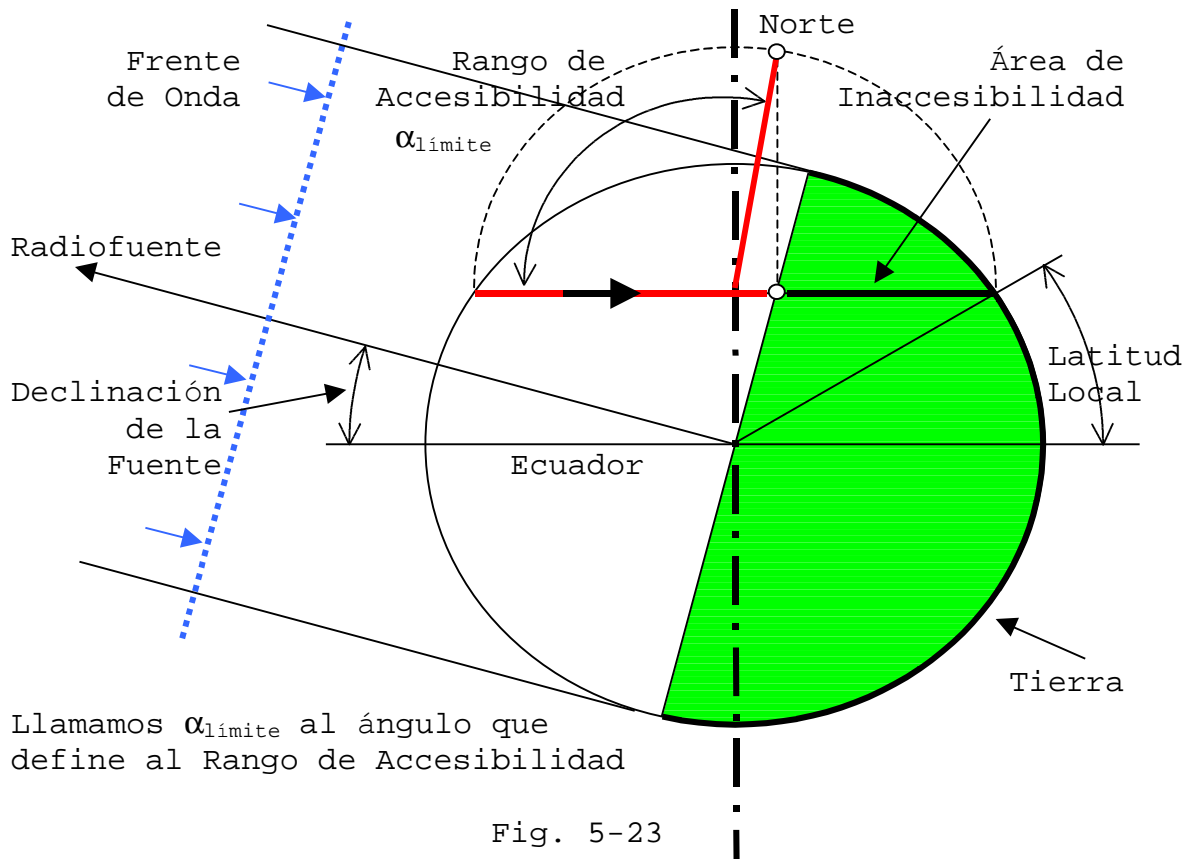


GRÁFICO DETALLADO DEL CONO DE ROTACIÓN Y SU PROYECCIÓN SOBRE EL PLANO DEL FRENTE DE ONDA

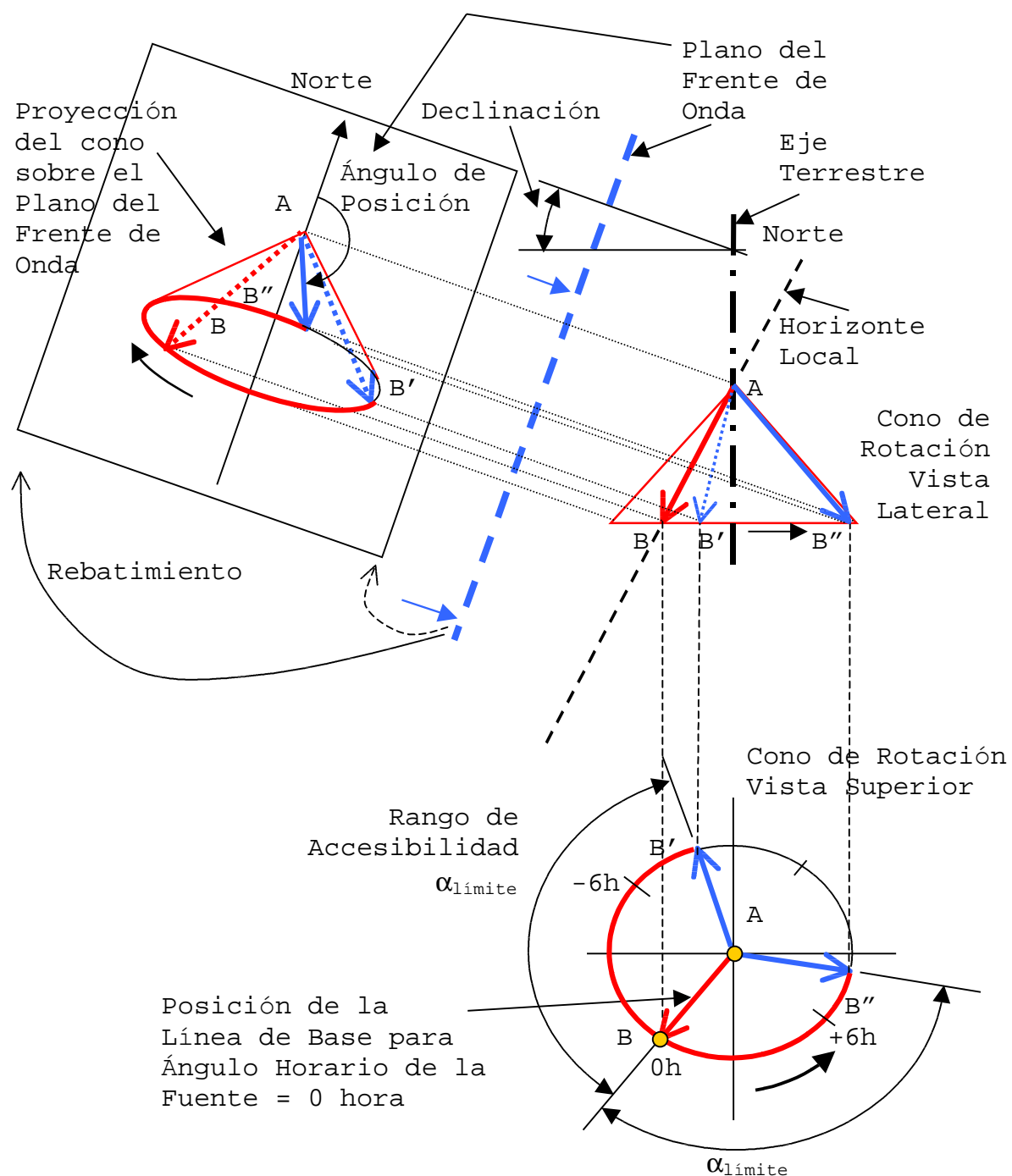


Fig.5-24 Se considera la antena A fija en el Eje Terrestre. La B, separada de la A por la Línea de Base (vector), recorre cada 24 horas, la circunferencia B, B'', B', B.

En la Fig. 5-24 se percibe una vista lateral y una superior del Cono de Rotación. Como se dijo, este cono representa al movimiento de la Línea de Base AB provocado por la rotación terrestre, a lo largo del transcurso de las 24 horas que toma dicha rotación.

A la izquierda se ve la proyección del cono sobre el Plano del Frente de Onda, tal cual como se la ve desde la Tierra.

En este gráfico se fijó la antena A al eje de rotación, haciendo que la antena B describa una circunferencia alrededor de dicho eje. Cuando la radiofuente se encuentra en su culminación superior (Ángulo Horario = 0 hora), la Línea de Base ocupa la posición AB. Desde el lugar donde está instalado el interferómetro, la radiofuente es accesible sobre el horizonte durante un intervalo de tiempo predecible hallando el Ángulo de Accesibilidad $\alpha_{\text{límite}}$, que se ve en la Fig. 5-23.

$$\alpha_{\text{límite}} = - \operatorname{tg}(\varphi) * \operatorname{tg}(\delta)$$

donde φ : Latitud Local en el lugar del interferómetro.

δ : Declinación de la radiofuente.

Este $\alpha_{\text{límite}}$, medido en horas, da el intervalo durante el cual la fuente está sobre el horizonte local.

$$\text{Intervalo (horas)} = 2 * \alpha_{\text{límite}}$$

La proyección del cono sobre el Plano del Frente de Onda, visto desde el interferómetro, proporciona la medida y orientación (Ángulo de Posición) de la proyección de la Línea de Base (a') durante este intervalo determinado por el arco de elipse B'' , B, B' , el que está dibujado con un segmento más grueso. Justamente es este segmento de elipse la que nos brindará crucial información sobre las franjas durante todo el viaje de la radiofuente por detrás de las mismas. La información se resume a cuatro parámetros:

Amplitud = factor fijo = 1

Fase

Ancho de franja (v.g. frecuencia de franjas)

Ángulo de Posición de franja

El mismo cono correspondiente a la Línea de Base AB, proyectado sobre Frentes de Onda de radiofuentes situadas en otras declinaciones (δ), darán diferentes elipses y otros ángulos $\alpha_{\text{límite}}$.

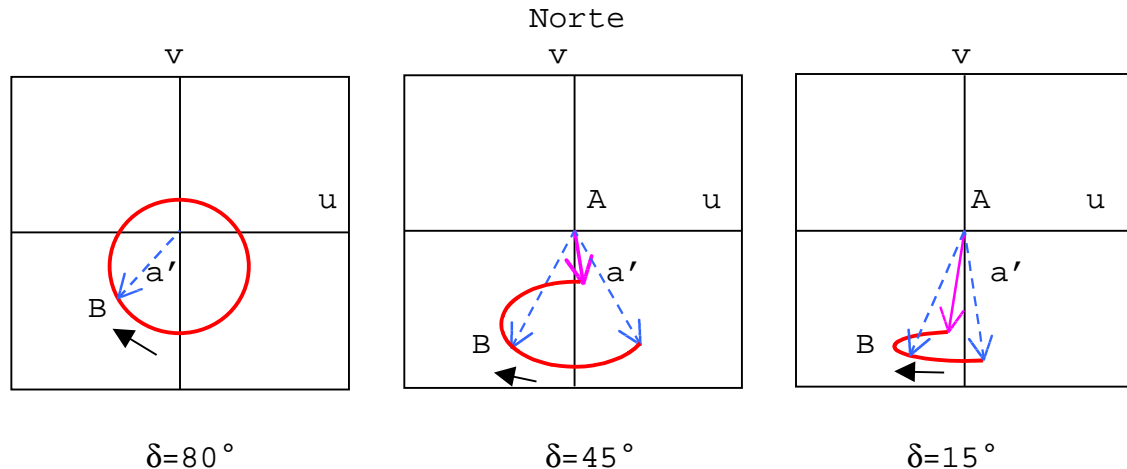


Fig. 5-25

Los gráficos corresponden a un interferómetro situado en el hemisferio norte, es decir, con latitud positiva.

Para una fuente situada a 80° de declinación (casi polar), la base del cono se proyecta como una elipse casi circular. Además la fuente puede ser circumpolar (nunca se pone detrás del horizonte), por lo que la trayectoria de B sería cerrada.

Si la fuente está a 45° de declinación, la excentricidad de la elipse es mayor y $\alpha_{\text{límite}} < 12$ horas, por lo que la trayectoria es cortada. Para una fuente a 15° el segmento de elipse es aún más corto, aproximándose a $\frac{1}{2}$ elipse en $\delta=0^\circ$ (ecuador celeste). Para declinaciones negativas (fuentes del hemisferio sur celeste), el segmento de elipse será todavía más corto, hasta que para $\delta=90^\circ-\phi$, el segmento de elipse desaparece.

Como se vió en la Fig. 5-6, la distancia entre franjas (distancia entre dos picos consecutivos) es

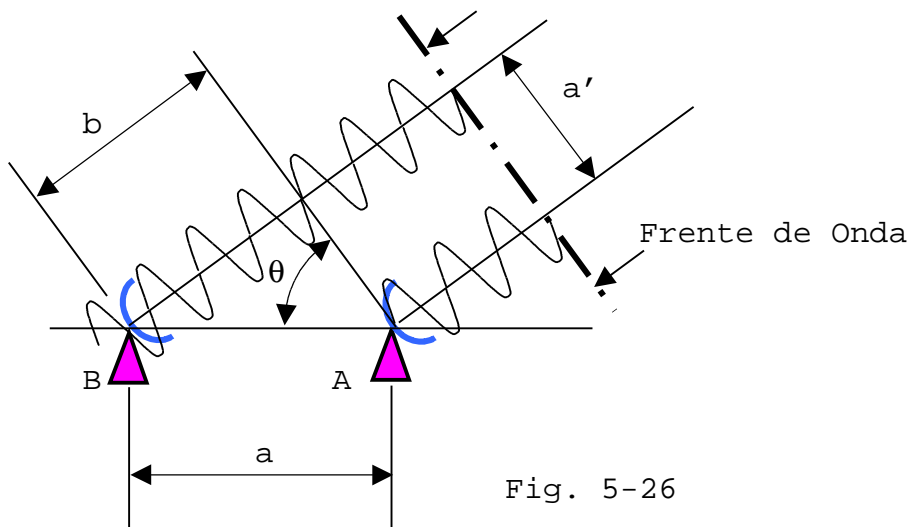
$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{a'} \quad (\text{radianes})$$

Entonces, la frecuencia de las franjas es

$$\text{Frec. franjas} = \frac{1}{\Delta\theta} = \frac{a'}{\lambda} \quad (\text{franjas por radián})$$

Esto significa que el largo del segmento a' es proporcional a la frecuencia de las franjas en el cielo, y su Ángulo de Posición da la dirección de las mismas. Por esto, los diagramas de la Fig. 5-25 representan frecuencias de las cosenoides (franjas) que se encuentran en las **Transformadas Bidimensionales de Fourier**. Estas frecuencias se representan en el diagrama **u-v** (frecuencias a lo largo de los ejes horizontal-Ascensión Recta- y vertical-Declinación-respectivamente).

Por otro lado, para buscar la fase de la franja que corresponde al centro del campo de apuntado de las antenas, estudiamos la Fig. 5-26, y vemos que el segmento **b** puede



contener varias λ y fracción. Esta fracción dará el valor de la fase φ :

$$b = a * \text{sen}(\theta) = n \lambda + \frac{\lambda * \varphi}{2 \pi}$$

con n = número entero de longitudes de onda

Pero de la proyección del cono tenemos como dato los valores de a y de a' para cada Ángulo Horario de la fuente, por lo que podemos escribir

$$b = n \lambda + \frac{\lambda * \varphi}{2 \pi} = \pm \sqrt{a^2 - a'^2}$$

si en lugar de medir a y a' en metros, se la expresa en longitudes de onda (λ), será:

$$b_{\lambda} = n + \frac{\varphi}{2 \pi} = \pm \sqrt{a_{\lambda}^2 - a_{\lambda}'^2}$$

De esta ecuación obtenemos φ como la parte fraccionaria de la raíz por 2π .

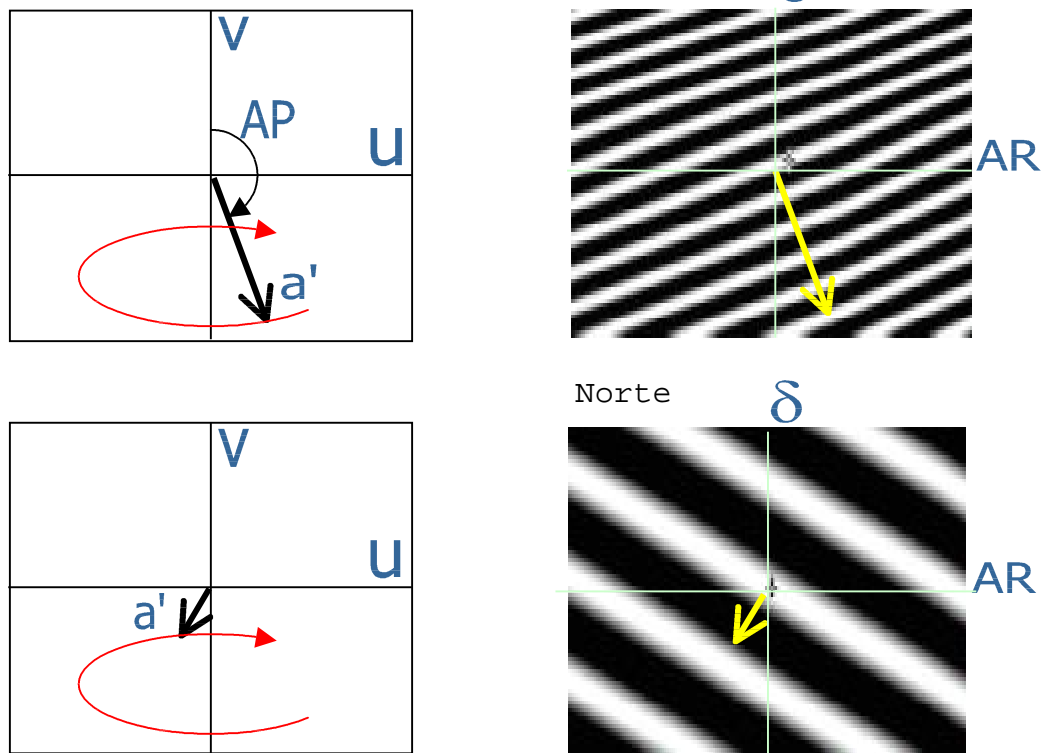


Fig. 5-27 Dos puntos de una hipotética trayectoria de una fuente. Para cada uno de ellos se grafica el diagrama $u-v$ de **frecuencias** de franjas y esas mismas franjas proyectadas en el cielo, en diagrama $AR-d$ (Ascensión Recta-Declinación). AP : Ángulo de Posición de a' .

Con la ecuación última podemos hallar la fase ϕ de las franjas con respecto al punto central de apuntado de las antenas.

Fig. 5-28 Un Ángulo de Fase positivo se mide desde el centro de apuntado de las antenas, hacia la dirección contraria al vector a' . En este caso es $j = +70^\circ$ aprox.

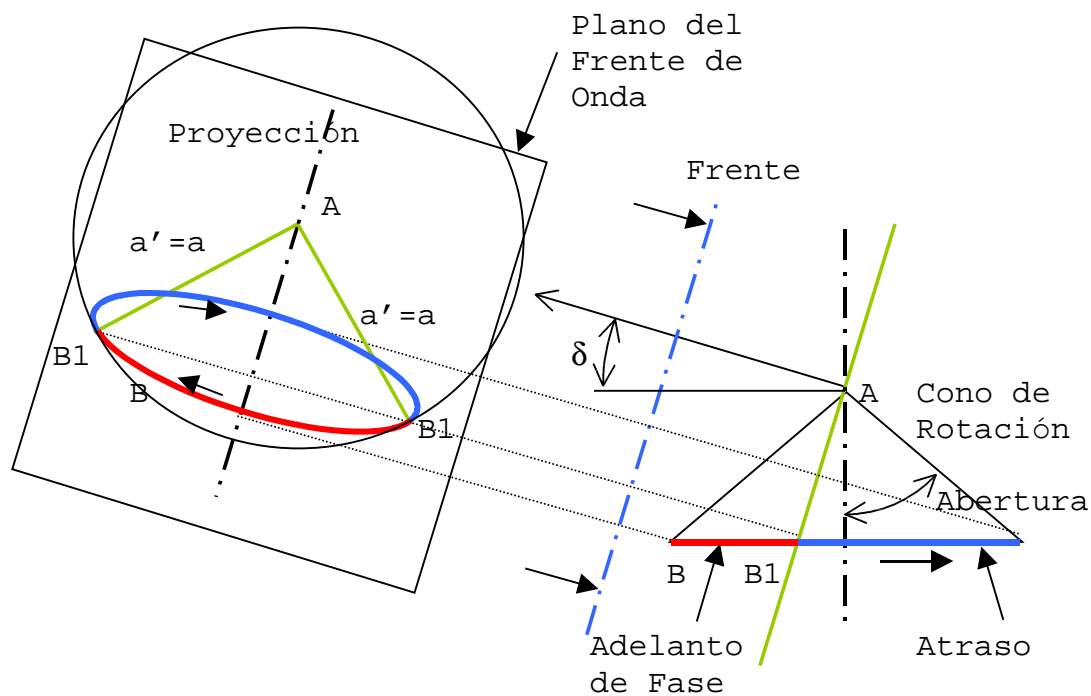
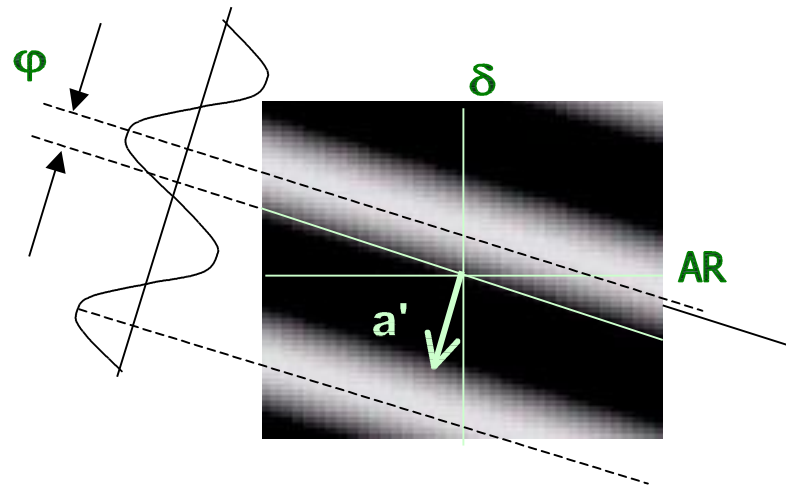


Fig. 5-29

El segmento b_λ , que representa la cantidad de λ 's que la antena B atrasa o adelanta con respecto a la A (de referencia) depende del valor de a_λ , como se ve en la ecuación anterior. Será positivo para cuando hay adelanto y viceversa cuando exista atraso.

En la Fig. 5-29 vemos en rojo la zona donde la fase está adelantada y en azul la atrasada. En la Proyección sobre el Plano del Frente de Onda, notamos que cuando la fase pasa de positiva (adelanto) a negativa, el valor de a' es igual al valor real de la Línea de Base a , lo que sucede cuando la antena B pasa por los puntos B1. Este es el máximo valor que puede tomar a' . La existencia, o no, de un cambio de signo en la fase estará dada por la diferencia entre el ángulo de abertura del Cono de Rotación y la Declinación δ , de la radiofuente. Si el valor absoluto de δ es mayor a la abertura del Cono no habrá cambio de signo de la fase en todo el recorrido de B.

La gráfica de la ecuación de b_λ en función de a'_λ es una función senoidal como se ve:

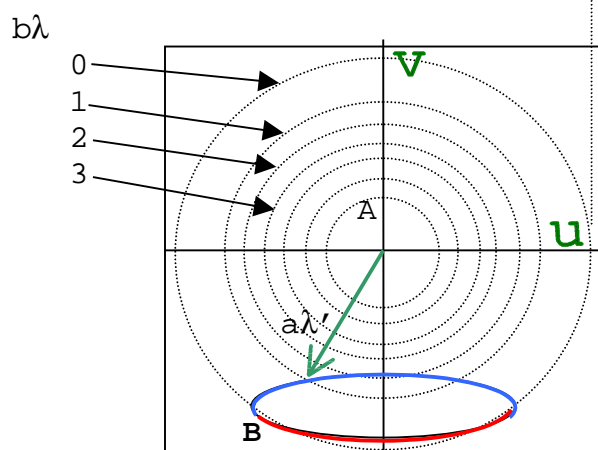
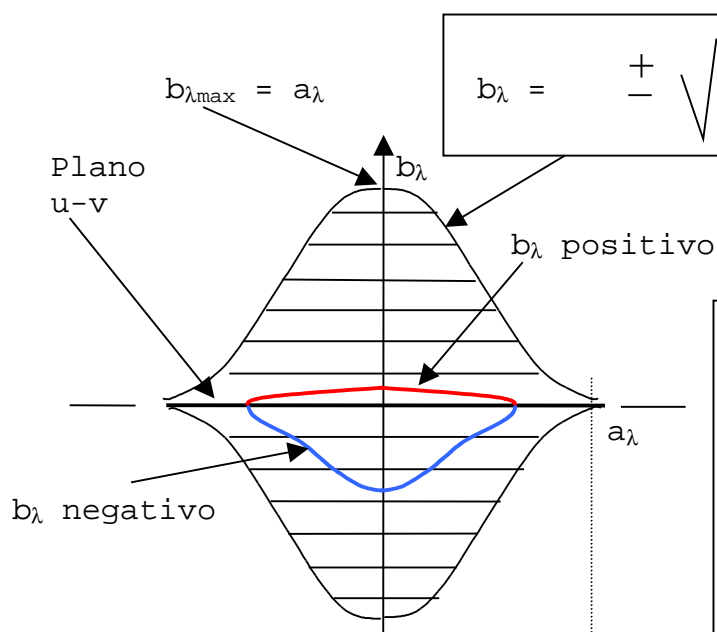


Fig. 5-30 El número de ondas que la antena B atrasa o adelanta respecto a la de referencia (A) está dado por el número (decimal) bl . El valor máximo de este número es justamente al . La proyección de la elipse del diagrama $u-v$ sobre la superficie de doble campana, definido por la ecuación de arriba, determina el número bl a lo largo del recorrido diurno de la antena B

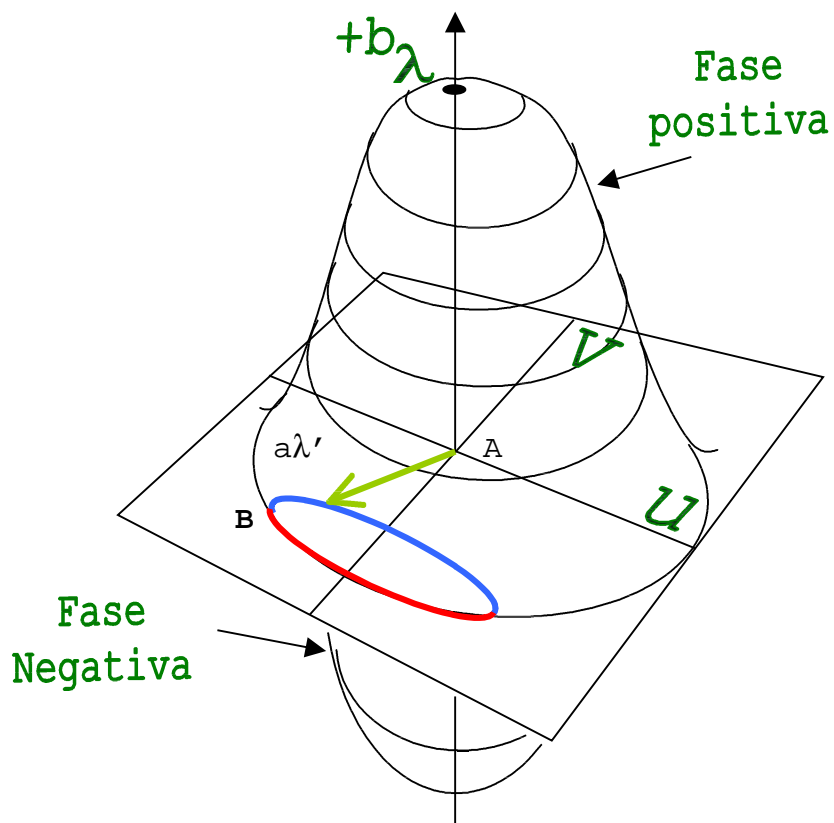


Fig. 5-31 El diagrama de doble campana graficado en la figura anterior se detalla aquí en una perspectiva para percibir mejor su forma. Habrá una superficie doble campana para cada $a\lambda$ diferente.

CONJUNTOS DE MÁS DE DOS ANTENAS

Hasta ahora hemos visto el diagrama u-v para un solo par de antenas. Sin embargo, un array puede contener varias antenas individuales las que formarían una combinación de pares. Por ejemplo, un conjunto de 4 antenas forman 6 pares diferentes a saber:

AB	AC	AD
	BC	BD
		CD

Por ello, el diagrama u-v correspondiente al array tendrá 6 elipses de igual excentricidad e igual Rango de Accesibilidad, para cada declinación de apuntado.

Es necesario entender a esta altura, que las franjas que estamos estudiando a través de la proyección del Cono de Rotación de las Líneas de Base de los diferentes pares de antenas, son *franjas de referencia* obtenidas por recursos matemáticos, contra las que compararemos las variaciones que se perciban en la **señal verdadera** que provenga del receptor del interferómetro correspondiente, cuando se siga una radiofuente real en su camino diurno por el cielo. Asimismo, estas franjas teóricas, de referencia, son obtenidas en la práctica cuando se sigue una **fuentes puntual**, es decir, técnicamente hablando, que las franjas estudiadas son la respuesta del equipo interferométrico a una fuente puntual que se desplace en el cielo.

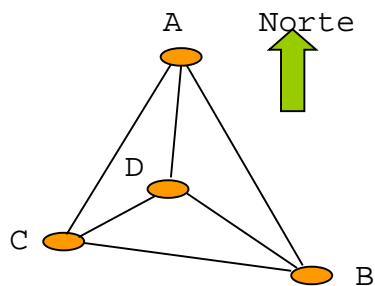
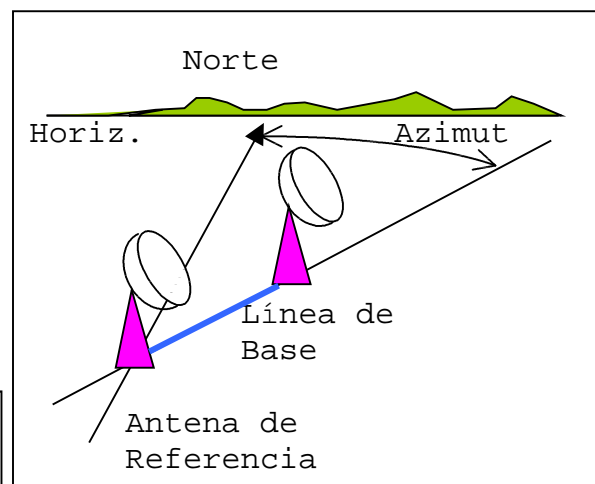


Fig.5-32 Planta de un array de 4 antenas donde se ven las 6 Líneas de Base que aparecen, y su orientación geográfica.



Este ordenamiento de antenas creará un diagrama u-v con múltiples elipses. Vemos las que corresponden a $\delta=20^\circ$

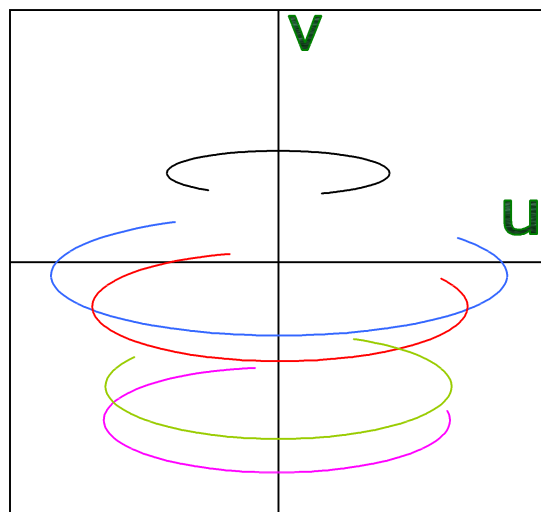


Fig. 5-33

La antena A se tomó como referencia para los brazos AB y AC. La D fué referencia de DA, DB y DC. La B, para BC. Las unidades de **u** y **v** son franjas por radián.

Para obtener una imagen de precisión desde esta síntesis, será necesario cubrir la mayor cantidad posible de puntos en el diagrama u-v, por lo que es conveniente el empleo de una gran cantidad de antenas. La forma de distribuir las antenas de un array se basa justamente en optimizar la cobertura del diagrama u-v en la forma más completa posible.

OBTENCIÓN DE DATOS DE UNA RADIOFUENTE REAL

Para lograr la formación de imágenes con un conjunto de antenas, habrá que tomar datos desde cada una de las celdas elementales que lo componen, que son los pares de antenas que forman interferómetros individuales, pero antes habrá que calcular las franjas de referencia.

Dada la Declinación δ , que tendrá el Centro de Apuntado (CA), se deben obtener, analíticamente, las elipses correspondientes a cada celda, incluyendo el diagrama de fase de las franjas visto antes (Fig. 5-30). Como dijimos, estas franjas son el marco de referencia teórico para comparar los datos reales obtenidos luego en la observación real.

Los datos obtenidos en la observación real son

Amplitud o Módulo
Fase

de las ondas que se registran en la salida del receptor del interferómetro, y los datos calculados para cada punto

Ángulo Horario del CA.
Frecuencia de las Franjas

En caso que se trate de un interferómetro de lóbulo barredor, las ondas tienen duración fijada por la velocidad del Desplazador de Fase rotativo. La Fase se toma con respecto a la marca que deberá producir la electrónica de control cada vez que un lóbulo rotante pase por el centro del CA. A cada momento en que se produzca una de estas marcas debe guardarse el Ángulo Horario del CA. Este ángulo se obtiene de los codificadores de posición de las antenas. En este tipo de interferómetro, el campo es barrido por las franjas con movimiento perpendicular a las mismas.

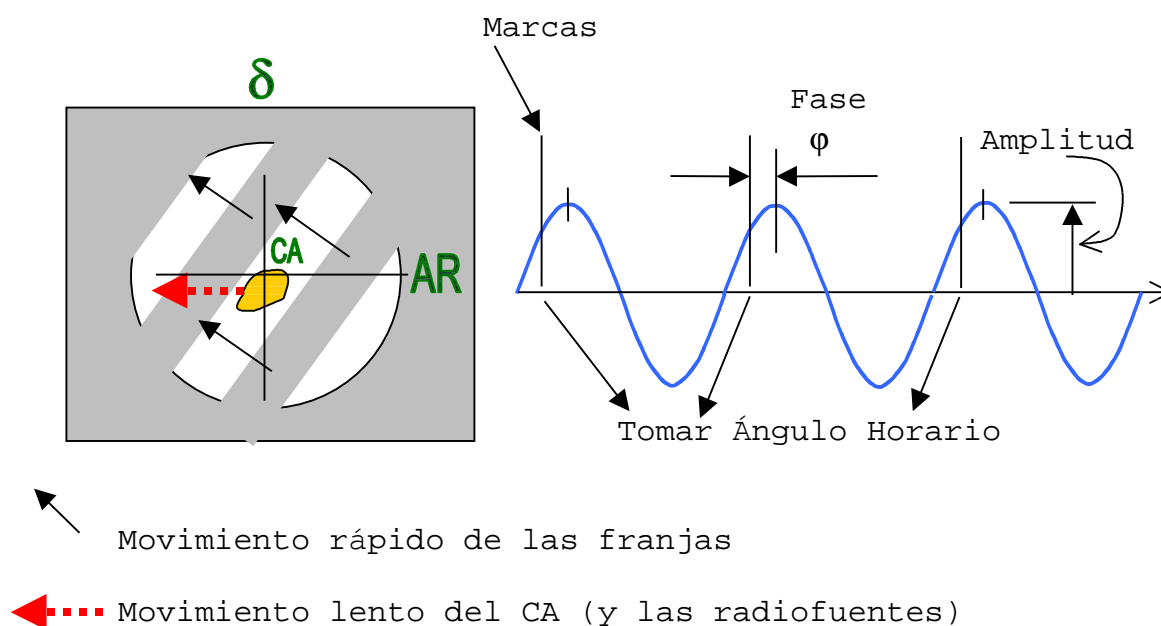


Fig. 5-34

Por otro lado, en caso de un interferómetro conmutado en fase, las ondas salidas del receptor oscilarán mucho más lentamente pues las franjas están estacionarias y debe esperarse que el

CA vaya desplazándose con la velocidad de la rotación terrestre.

Aquí se guardará la Amplitud de la onda y el Ángulo Horario que tiene el CA en los momentos de Fase = 0°.

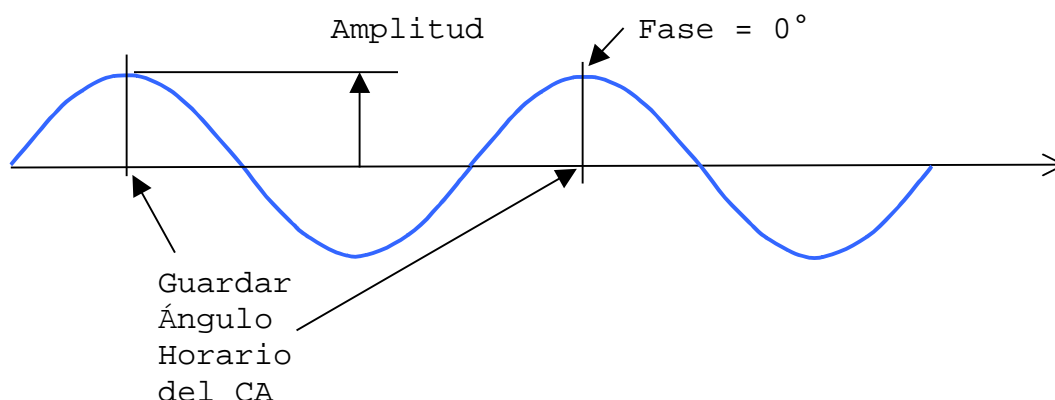


Fig. 5-35

Llega ahora el momento de calcular la Fase para el cálculo de Fourier (FCF). Estos valores serán el resultado de restar la Fase Medida de la Fase de las franjas de referencia, que debió calcularse previamente, como se sugirió. Los valores tendrán como parámetro de referencia al Ángulo Horario. Los datos se tabularán, por ejemplo, del modo siguiente

Interferómetro BC ($a_{\lambda BC} = 34.5$)					
Ángulo Horario	a_{λ}'	Fase Medida	Fase Franja	FCF	Amplitud o Módulo
03h 00m	19.35	35°	22°	13°	3.55
03h 10m	18.27	34°	20°	14°	3.43

Estos datos estarán tabulados por cada uno de los interferómetros, a lo largo de toda la travesía de seguimiento de las radiofuentes dentro del campo del cielo alrededor del Centro de apuntado (CA).

Con ellos se aportará información para construir el diagrama doble(Módulo y Fase)-tridimensional en el campo de las variables de frecuencias u-v. Este diagrama es el necesario

para sintetizar la imagen de las radiofuentes buscada, a través del análisis de Fourier.

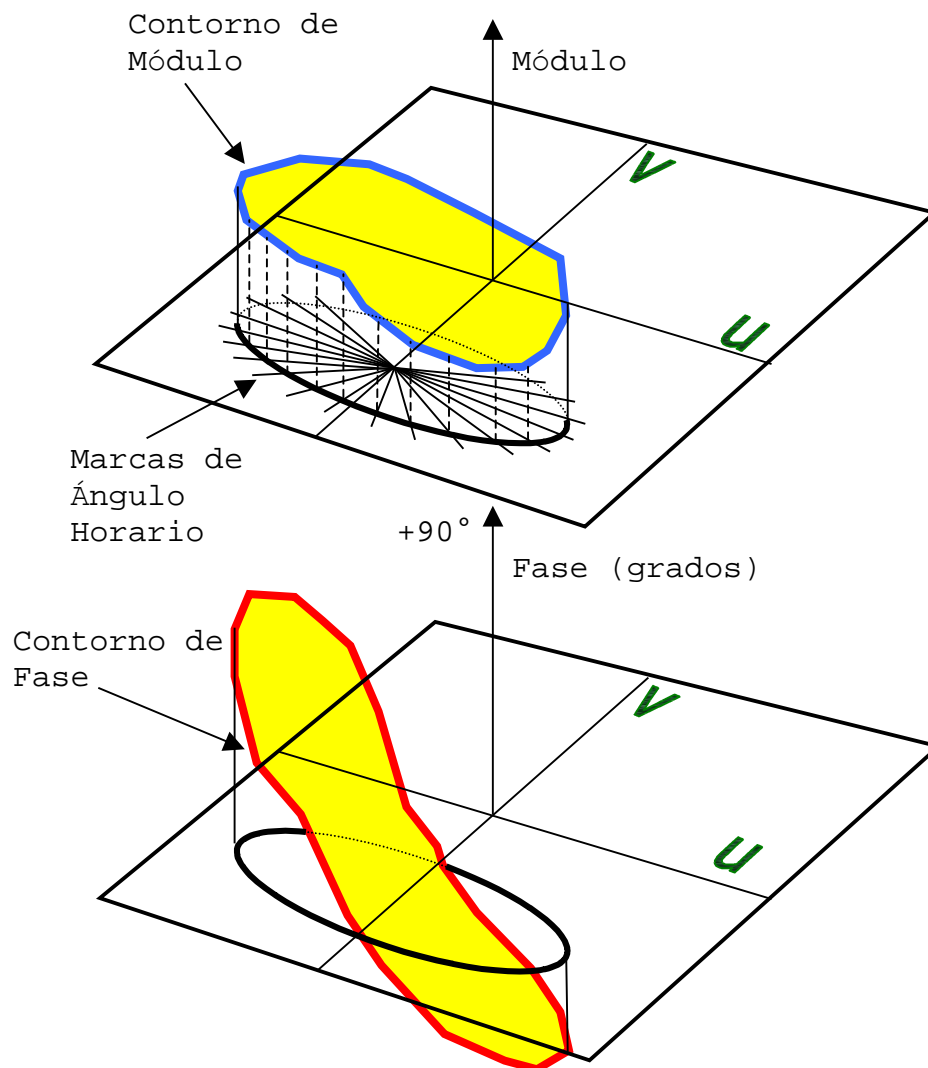


Fig. 5-36 Diagramas sobre el plano u-v de Módulo y Fase para una de las elipses correspondientes a uno de los interferómetros de un array. Los contornos resultan de la representación gráfica de los valores medidos en el seguimiento de la fuente real, que fueron volcados a la tabla anterior. Este trabajo se debe repetir para cada interferómetro, cada uno generando sus respectivos contornos de Módulo y Fase.

Fig. 5-37 Una vez graficados todos los contornos Módulo-Fase sobre el diagrama de frecuencias de franjas, se construyen las superficies correspondientes, teniendo en cuenta las restricciones de simetría para el Módulo y antisimetría para el de Fase. En el gráfico de la derecha se ven las superficies completadas y suavizadas. También se ve uno solo de los contornos (para claridad del dibujo) que dieron origen a dichas superficies.

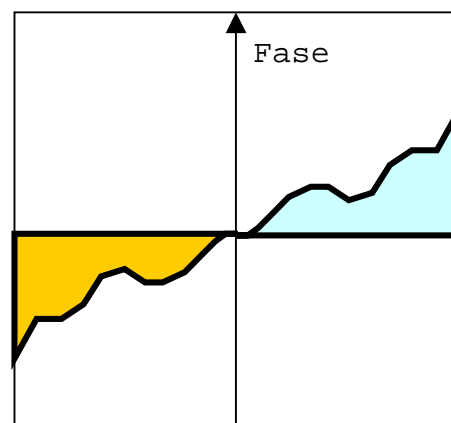
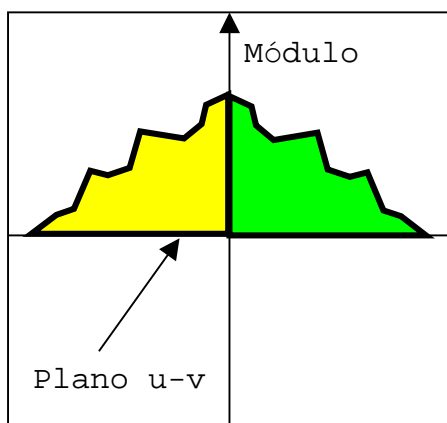
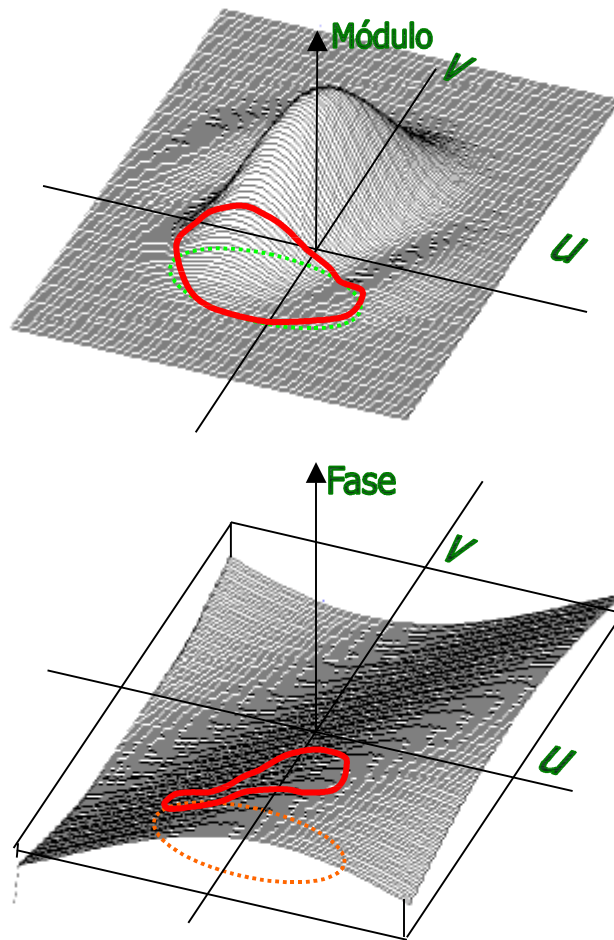


Fig. 5-38 Condiciones de las superficies. Módulo: Es simétrica respecto al eje. Fase: Antisimétrica respecto al mismo.

Una vez obtenidas las superficies sobre el plano $u-v$, será necesario antitransformarlas a coordenadas $AR-\delta$ (Ascensión Recta-Declinación). Los detalles de esta antitransformada la vemos en el Apéndice dedicado a la Transformada de Fourier.

Fig. 5-39 Un ejemplo del resultado que puede obtenerse luego de antitransformar un caso de superficies en el diagrama $u-v$ puede ser el de la derecha, graficado en sistema 3D.

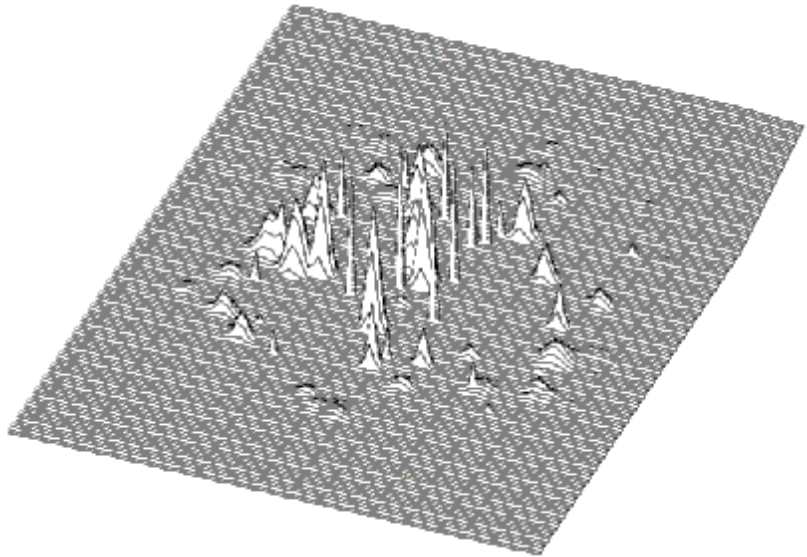


Fig. 5-40 El mismo archivo de datos que fue graficado en 3D puede representarse en niveles de gris, tomando una semejanza con las imágenes ópticas.

