LÍNEAS DE TRANSMISIÓN

Los conductores eléctricos destinados a transmitir energía se llaman líneas de transmisión. Nos ocuparemos de las líneas destinadas a transportar energía en frecuencias de radio, específicamente desde 1MegaHertz hasta varios GigaHertz.

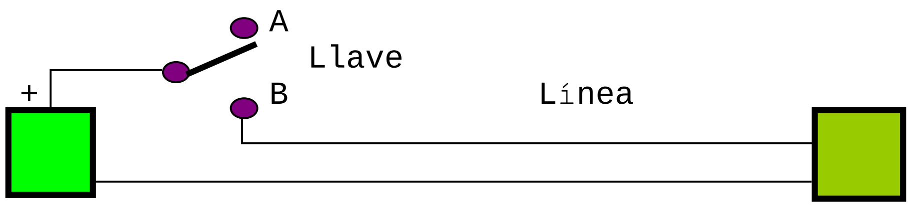


Fig.1

Por ejemplo, si se tiene una batería que se conecta con una carga lejana a través de una línea de cables paralelos por medio de la conmutación de la llave desde A a B, se establecerá una corriente en la línea que alimentará la carga. Pero este fenómeno no es instantáneo. Apenas se conecta la llave, se produce una ola de tensión en la línea que viaja hacia la llave a una velocidad muy próxima a la de la luz.

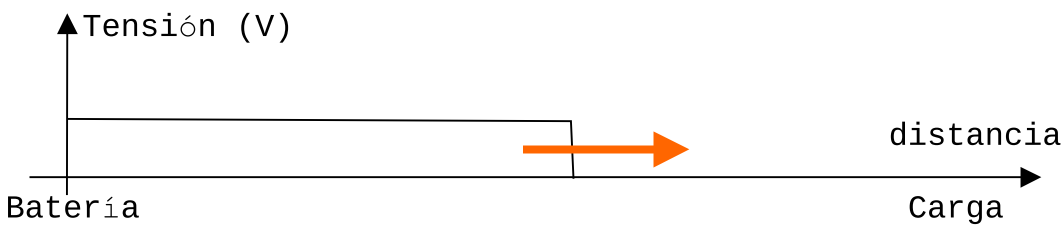


Fig. 2

Si se midiera rápidamente la tensión entre los alambres de la línea luego de un instante de la conexión de la llave, se tendría un gráfico como el de arriba, donde un frente de onda se dirige a casi la velocidad de la luz hacia la carga. Cada segmento de la línea va recibiendo y entregando la enegía en dirección a la carga.

El análisis teórico de una línea se basa en la hipótesis que establece que cada segmento elemental de línea es en realidad, un dispositivo (cuadripolo) que recibe y entrega energía.

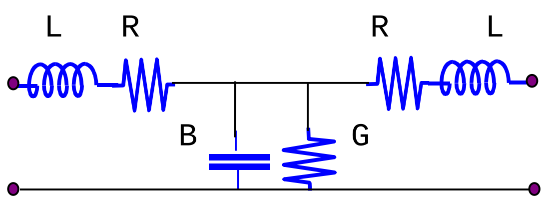


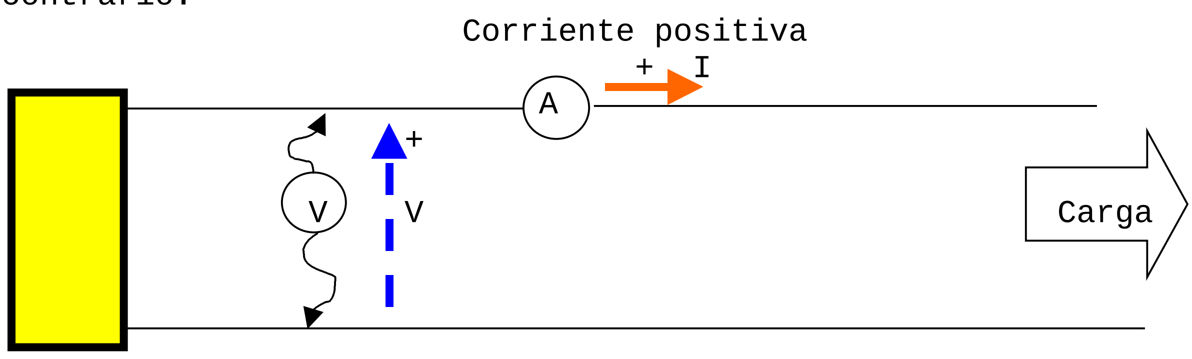
Fig.3

este gráfico representa el circuito equivalente de un trozo de logitud unitaria (1 metro) de la línea de transmisión. Los elementos pasivos mostrados representan las *constantes distribuidas* de la misma

L: Inductancia por metro (provocada por el magnetismo disperso)
R: Resistencia por metro (resistencia óhmica del conductor)

B: Suceptancia por metro (debido a la capacidad entre los conductores)
G: Conductancia por metro (causada por la conducción de electricidad a través del dieléctrico que separa los conductores-plástico, aire, etc.)

A diferencia de los dispositivos eléctricos y electrónicos que están localizados en un solo lugar del espacio y que por ello se llaman componentes discretos (resistencias, capacitores, inductores, transistores, etc.), el circuito equivalente de una línea es un conjunto de estos cuadripolos en cascada (uno a continuación del otro). El análisis matemático del comportamiento de esta cadena de cuadripolos resulta en la conclusión que dice que por una línea de transmisión la energía viaja por medio de ondas de tensión y corriente. Habrá ondas que viajan del generador a la carga, y para sorpresa de los lectores, coexistirán con otras que viajan en sentido contrario.



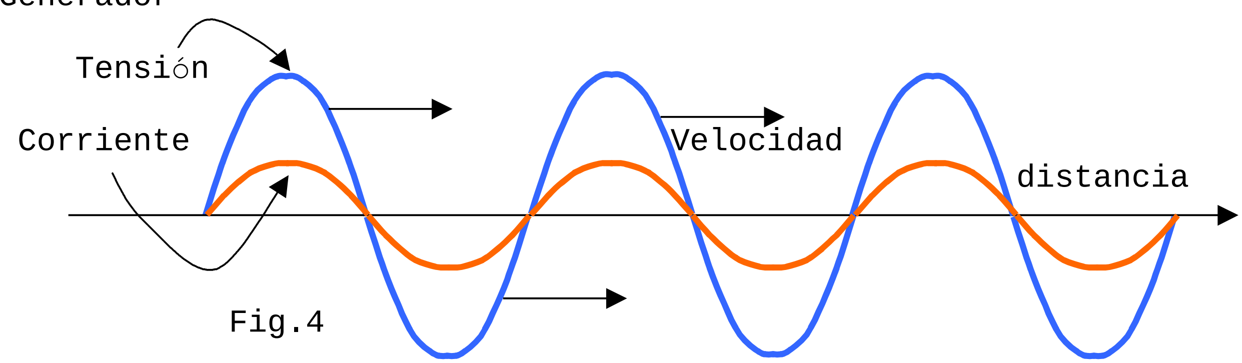


Fig.4

Si pudiéramos paralizar la onda en un instante dado y explorar la línea con un voltímetro y amperímetro, nos daríamos cuenta que la tensión entre los alambres seguiría un gráfico ondulatorio como el representado arriba. Esto es aceptando que cuando el alambre superior es positivo respecto al inferior lo graficamos sobre el eje(tensión positiva). El recorrido con el amperímetro también nos revela que, si adoptamos la convención de que la corriente positiva es la que va hacia la carga en el conductor superior, la corriente también tiene una distribución senoidal a lo largo de la línea. Además esta corriente está en fase con la tensión.

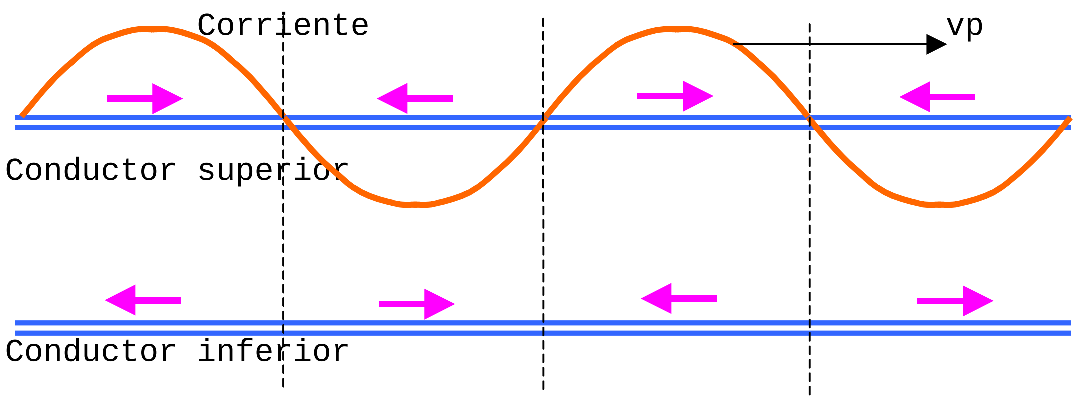


Fig.5 Se grafica una línea bifilar de conductores paralelos donde se establecen zonas en las que la corriente instantánea circula en los sentidos que se ven en el dibujo. Las corrientes en el conductor superior se representan en el gráfico senoidal. Las del conductor inferior son opuestas a las del superior. Estas zonas se propagan a lo largo de la línea con velocidad vp. Las zonas correspondientes a las líneas punteadas verticales son lugares de cargas acumuladas o raleadas.

Si, por otro lado, vemos el apéndice sobre electricidad, veremos que esta onda lleva energía desde el generador a la carga en toda la extensión de la onda.

Hemos descripto una línea donde existe una sola onda que viaja desde el generador hacia la carga. No existe onda de retorno. Este es un caso especial que ya veremos más adelante. En general, como se dijo anteriormente, en las líneas coexisten dos ondas que viajan en sentido contrario

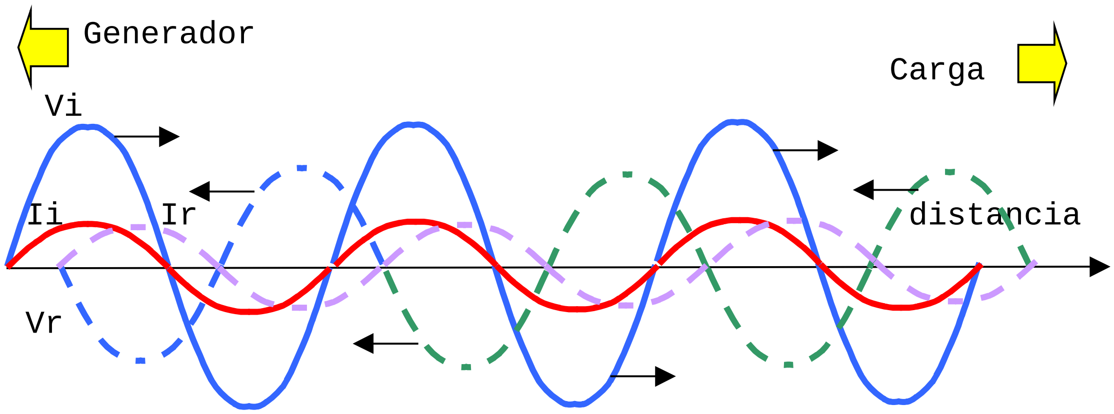


Fig.6

Se han dibujado las ondas de tensión y corriente en una línea de transmisión. Las líneas llenas representan ondas que viajan del generador a la carga (ondas incidentes en la carga). Ver que la tensión y la corriente están *en fase*. En líneas punteadas se grafican las ondas de tensión y corriente que viajan de retorno hacia el generador (ondas reflejadas en la carga). Notar que ahora la tensión reflejada está *en contrafase* con la corriente reflejada, demostrando que la energía se transporta en devolución hacia el generador.

Representación vectorial de las ondas.

Si analizamos las ondas en la línea usando vectores rotativos vemos lo siguiente:

Representación espacial: Suponemos que una onda que se propaga desde el generador a la carga (onda incidente en la carga) lo hace hacia valores de distancia creciente. A la distancia la definimos como la coordenada x.

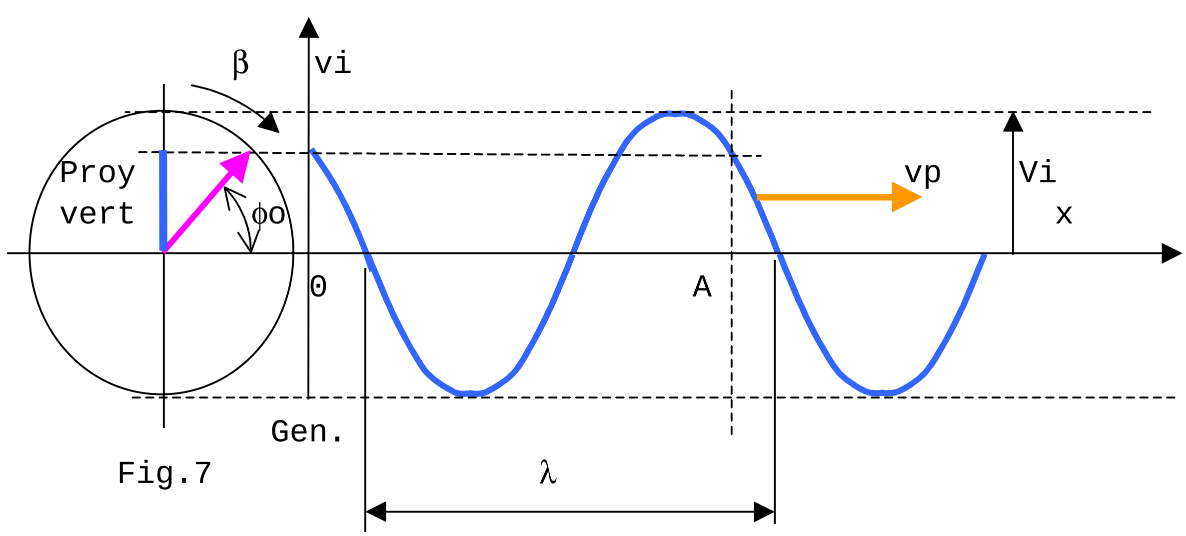


Fig.7

Si en un momento que llamaremos t=0 (origen de la coordenada tiempo) pudiéramos sacar una instantánea de la línea donde pudiéramos medir las tensiones en cada punto de ella, como hemos hecho antes, y fijamos el cero para las distancias x en el generador, podríamos graficar esas tensiones en cada punto y obtener la forma senoidal correspondiente. El largo de línea abarcado por un ciclo completo es la longitud de onda (λ) que resulta de

$$\lambda\ (m) = \frac{c * h\ \ (m/s)}{frec\ \ (Hz)}$$

donde c: velocidad de la luz en el vacío
h: factor de corrección que depende del dieléctrico usado en la línea (aprox. 0.66, siempre menor que 1)
frec: Frecuencia de la onda en Hertz

Si recorremos la línea en sentido de las distancias crecientes desde x=0 (generador) hasta x=A, el vector giró una revolución completa, es decir recorrió un ángulo de 2π radianes.

La curva senoidal es el resultado de graficar la proyección vertical del vector rotante en función de la coordenada x (distancia al generador), por ello la expresión matemática de esa onda espacial será:

$$vi = Vi\ \ sen\left(- \frac{2\pi}{\lambda} x + \phi o \right)$$

a la relación $2\pi/\lambda$ se la llama velocidad espacial de fase y se le asigna la letra β. No se debe olvidar que la expresión dentro del corchete siempre debe ser un ángulo.

El ángulo ϕo es el ángulo de fase inicial (para x=0 y t=0) del vector rotante como se ve en el dibujo.

Vi es el valor máximo de la tensión incidente (módulo del vector rotante) que tiene a vi como valor instantáneo en el lugar de la línea x y el momento t.

Representación temporal: Si ahora nos situamos en un punto fijo de la línea (por ejemplo, el generador donde x=0) y medimos con un osciloscopio rápido la tensión entre conductores allí tendremos la posibilidad de representar otro gráfico senoidal, pero ahora en función del tiempo.

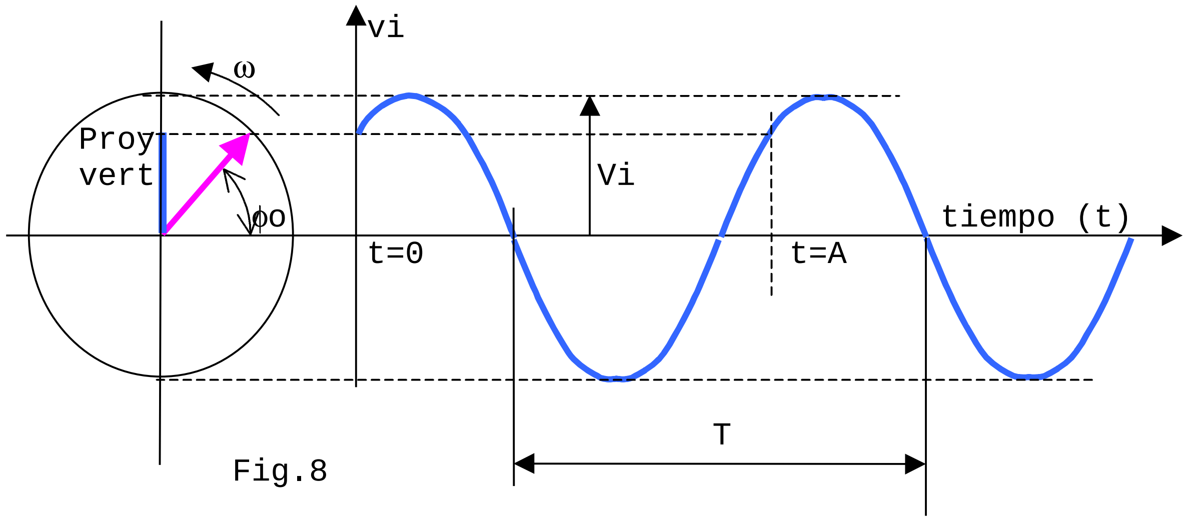


Fig.8

Se debe aclarar que la onda de tensión exclusivamente temporal no se propaga. Es simplemente la representación de la variación en el tiempo de la tensión entre conductores en un punto determinado de la línea de transmisión.

Desde t=0 hasta t=A, el vector rotante da una vuelta completa, tardando un tiempo T (segundos). La frecuencia de la onda es

$$f(Hz) = \frac{1}{T\ (seg)}$$

El gráfico senoidal difiere radicalmente del espacial anteriormente descripto, aunque esté tratando la misma onda. El ángulo inicial de fase ϕo es el mismo, pero ahora el vector rota en sentido contrario al vector espacial. Y lo hace con velocidad angular ω.

$$\omega\ (rad/seg) = \frac{2\pi}{T(seg)} = 2\pi\ f(Hz)$$

Esto lleva ahora que la expresión matemática de la tensión vi en función del tiempo es

$$vi = Vi\ \ sen\ (\omega\ t + \phi o)$$

Ambas expresiones matemáticas de la onda (espacial y temporal) se pueden condensar en una sola.

Para la onda incidente sería

$$vi = Vi \ \mathrm{sen}\ (\omega t - \beta x + \phi o)$$

El valor de la velocidad espacial de fase β es negativo, puesto que el vector espacial gira en sentido de los ángulos decrecientes, como ya se vió anteriormente.

Onda reflejada: Si empleamos el mismo razonamiento para la onda que viaja desde la carga hacia el generador encontraremos la expresión matemática correspondiente que es

$$\boxed{vr = Vr \ \mathrm{sen}\ (\omega t + \beta t + \rho o)}$$

donde

- vr: tensión instantánea entre los conductores de la onda reflejada (Volt)
- Vr: Valor máximo (amplitud) de la tensión reflejada.
- ω: Velocidad angular del vector rotatorio temporal en radianes por segundo
- β: Velocidad espacial de fase del vector rotatorio espacial (radianes por metro)
- ρo: Ángulo inicial de fase de la onda reflejada (para t=0 x=0)

Se nota que la onda reflejada tiene la velocidad espacial de fase (β) positiva, a diferencia de la correspondiente a la onda incidente.

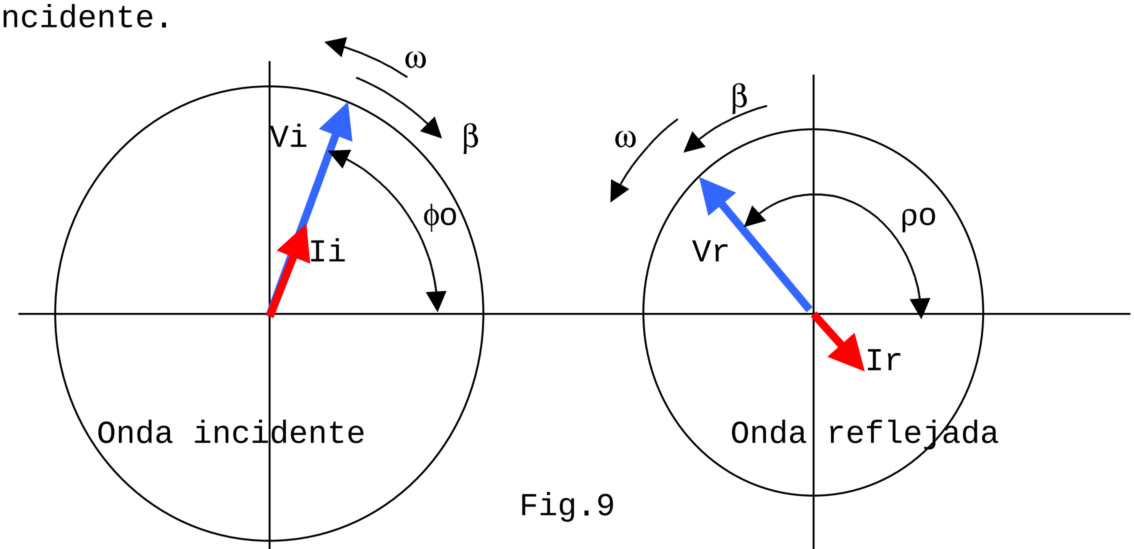


Fig.9

Recordar que Ir está en contrafase de Vr.

Algunos tipos de líneas de uso común

Las líneas de transmisión pueden tener varias formas, incluso pueden ser impresas en una plaqueta de circuito impreso. En este último caso toman el nombre de líneas de micro tira (micro-strip lines).

Las líneas constituidas por cables son en general

- Bifilares (de dos conductores paralelos iguales)
- Cuadrifilares (de cuatro conductores)
- Coaxiles (un conductor central y un blindaje exterior)

Las dos primeras representan casos de líneas balanceadas, en cambio las líneas coaxiles son desbalanceadas.

Una línea bifilar es balanceada por que cada uno de sus conductores tiene tensión opuesta respecto a masa (está balanceada respecto a masa). En cambio un cable coaxil constituye una línea desbalanceada pues solo su conductor central tiene la onda de tensión y corriente mientras que el blindaje periférico está todo a potencial de tierra, lo que hace que en él no exista onda ni de tensión ni de corriente.

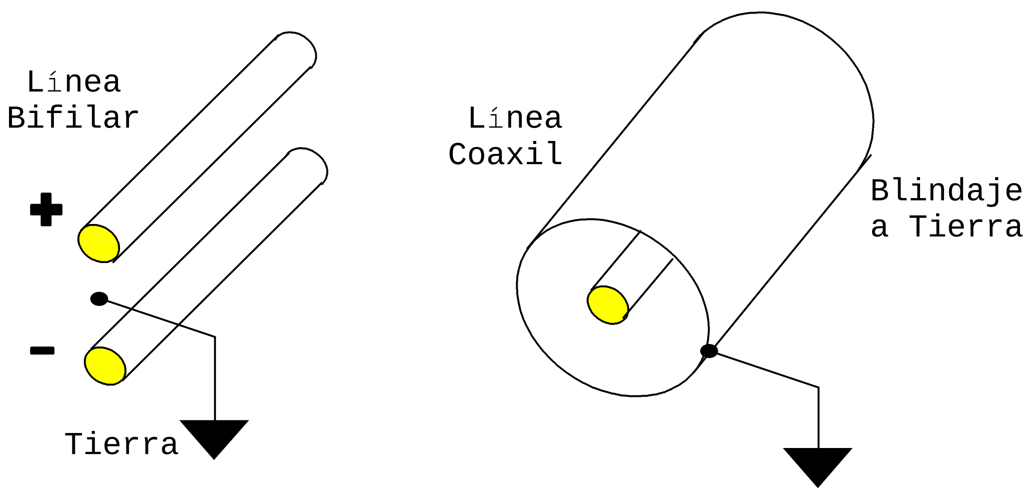


Fig.10

Línea de largo infinito

En una línea (ideal) de largo infinito no existe la onda reflejada. En efecto, las resistencias serie (R) y la conductancia en paralelo (G) del cuadripolo equivalente al elemento de una línea, visto arriba, ocasionan una inevitable disipación en calor de una parte de la energía eléctrica conducida. Este efecto se traduce en atenuación de las ondas que viajan por la línea.

Si la línea es muy larga, la potencia que llegará a la carga será prácticamente cero. La atenuación de la potencia de la onda es exponencial, es decir, por cada unidad de longitud de línea, la onda incidente se reduce en un porcentaje fijo, dependiendo de las características de pérdidas de la línea en sí.

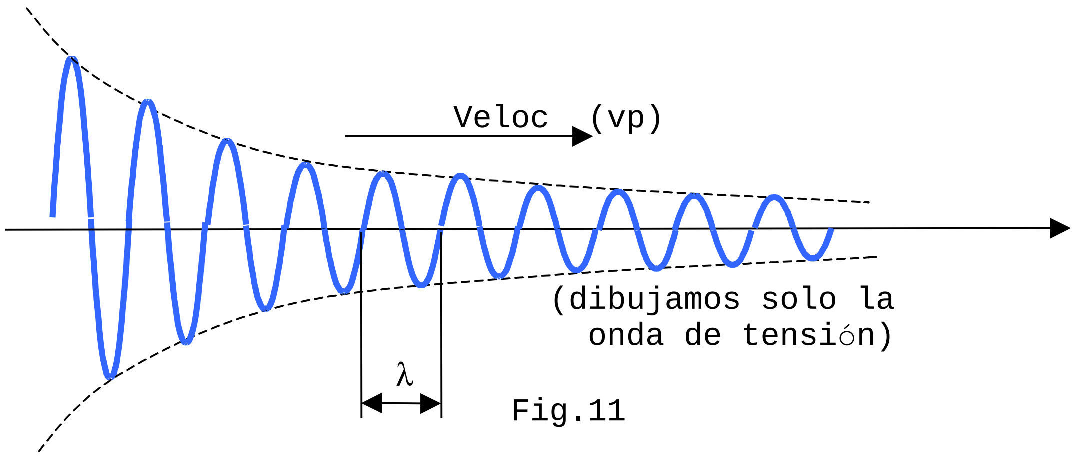


Fig.11

La atenuación de la línea no afecta ni la velocidad de propagación, ni la longitud de las ondas (λ). La velocidad de propagación en las líneas bifilares con separación de aire es similar a la de la luz en el vacío. En cambio, en las líneas con separador dieléctrico (polietileno, teflón, etc) como en el caso de las coaxiles, la velocidad de propagación es menor a c, pudiendo estar en alrededor de

$$vp = 0.66\ c$$

Como la frecuencia de las ondas es un valor que no puede cambiar, la longitud de onda (λ) en la línea es menor que la longitud de esa onda en el vacío (en donde se propagaría a la velocidad c)

En este caso de línea infinita sabemos que solo hay ondas incidentes (en la carga), de tensión y de corriente, y que además están en fase. Por ello, la carga equivalente que ve el generador es simplemente una resistencia. El valor de la resistencia que el generador ve cuando se le conecta una línea infinita se llama

Impedancia Característica de la Línea = Zo

Veamos algunos ejemplos:
El viejo cable de conductores paralelos que se usaba en las antenas de los televisores (antes de la televisión por cable) tiene una impedancia característica Zo de 300 Ohm (línea balanceada).

En cambio, el coaxil de TV usado hoy es de 75 Ohm (desbalanceado).
Los radioaficionados y muchos equipos profesionales de comunicaciones utilizan cables de

$$Z_o = 50\ \Omega$$

El uso de cables de impedancias standard reduce costos, pero no existe ningún problema en el uso de líneas con otras impedancias características si la necesidad lo exige.

Reflexión de las ondas. Coeficiente de reflexión

Si la línea no es infinita, las ondas desde el generador llegarán a la carga. La condición para que las ondas, o parte de ellas, no se reflejen nuevamente hacia el generador es que la carga debe ser resistiva y debe tener un valor *igual* al de la impedancia característica de la línea.

$$R_c = Z_o$$

Si esto ocurre, se dice que la línea está terminada. Solo existen, entonces, ondas propagándose desde el generador hacia la carga. Y en ésta, se consume toda la potencia incidente. La carga Rc puede ser, además de una resistencia física, una antena adaptada. La antena irradiará al espacio la potencia que llega desde el generador. Para la línea, la antena *se verá* como una resistencia consumidora de potencia.

Veremos qué ocurre en los casos en que la impedancia de carga difiere del valor de la impedancia característica de la línea Zo. Consideraremos primero casos especiales, como cuando se termina la línea con un cortocircuito o se deja desconectada en circuito abierto.

Cicuito abierto (Rc = infinito)

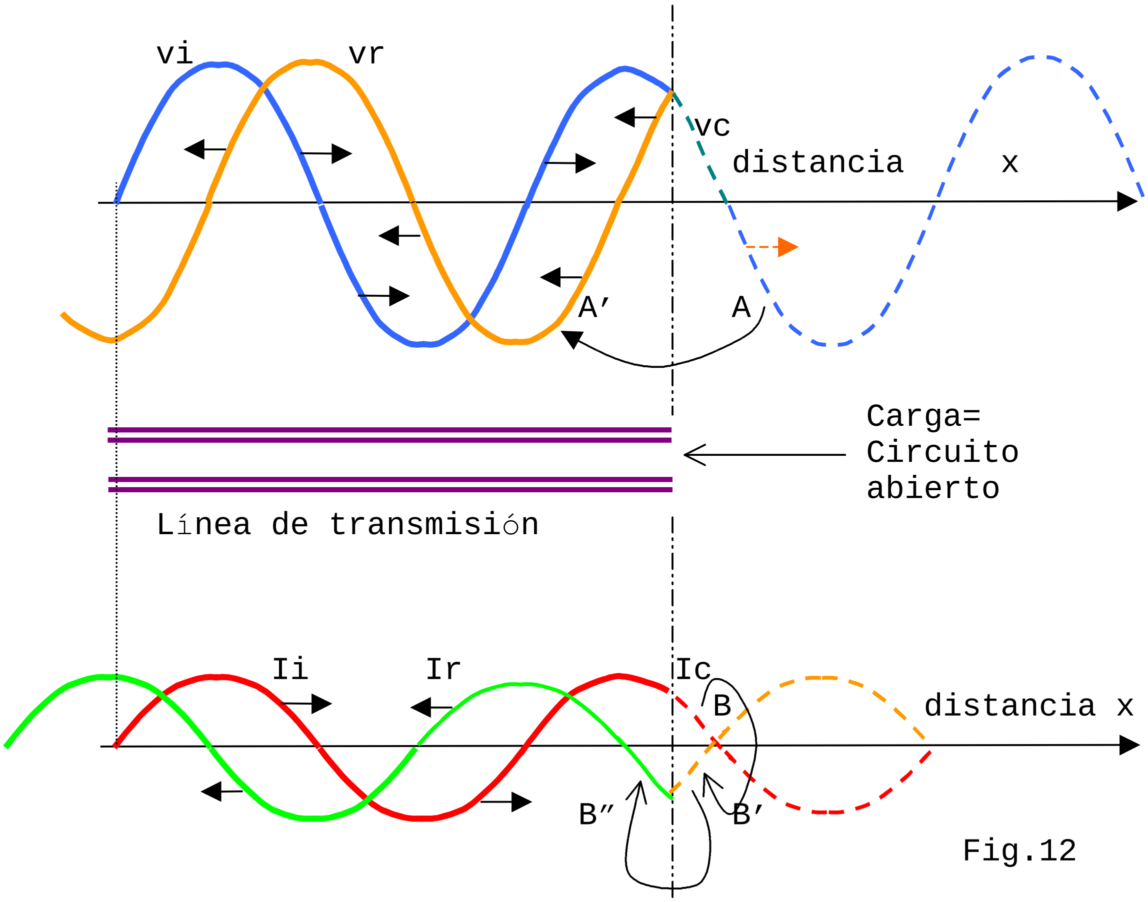


Fig.12

La onda de tensión (V) se refleja de distinto modo que la de corriente (I). En el caso de la tensión, la onda reflejada se obtiene prolongando imaginariamente la onda incidente después de la carga (punteada) y haciendo una inversión de espejo indicada con A A'.

La tensión en la carga es la suma de las tensiones instantáneas provocadas por la onda incidente y la reflejada.

vc = vi + vr

En este caso particular la onda se refleja completamente, por lo que vr = vi. Entonces la tensión total en la carga (extremo abierto de la línea) es

vc = 2 vi

El coeficiente de reflexión en la carga se define como la relación entre la tensión reflejada respecto a la incidente

$$\Gamma = \frac{vr}{vi}$$

Γ es un número sin unidad. Para la onda de tensión es

$$\Gamma = +1$$

La onda reflejada de corriente se obtiene prolongando la onda de corriente más allá de la carga (punteada), invirtiéndola verticalmente (B B')y por último se realiza na inversión espejo horizontal (B' B").

La corriente total en la carga será entonces la diferencia entre la corriente instantánea incidente y la reflejada

$$ic = ii - ir$$

como en caso de cirduito abierto ii = ir la corriente efectiva en la carga es cero (lógicamente, por un circuito abierto no puede pasar corriente alguna).

El coeficiente de reflexión de corriente en la carga no se suele emplear normalmente pues el análisis realizado con el de tensión es suficiente, pero daremos una idea ilustrativa al respecto

$$\Gamma(I) = \frac{ir}{ii} = -1 \text{ (negativo)}$$

Una consecuencia importante que surge como resultado de tener dos ondas con velocidades contrarias en la misma línea es que ellas dan lugar a la formación de ondas estacionarias.

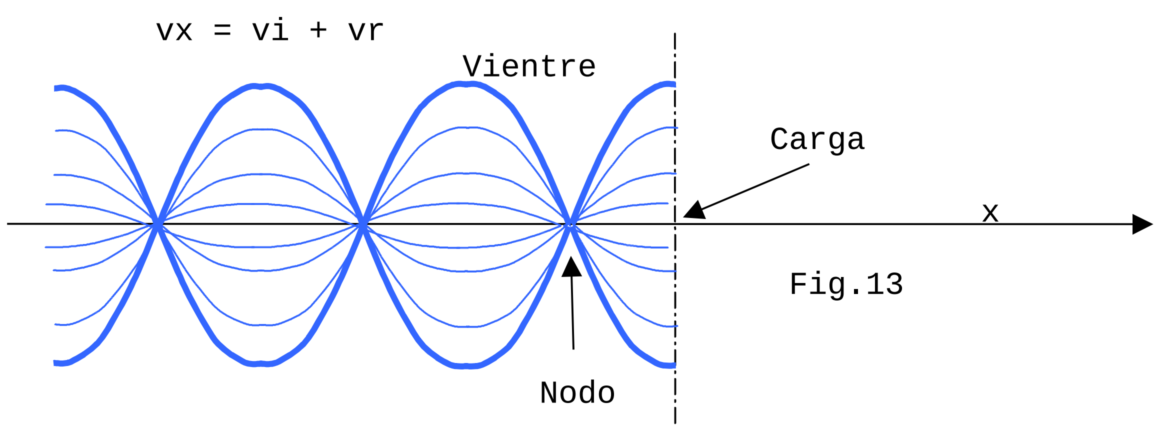


Fig.13

Por ello si recorremos la línea midiendo con un osciloscopio la tensión entre los dos conductores, veremos que existen puntos fijos en la línea donde la tensión alterna es cero. Estos puntos son llamados Nodos. Por otro lado, los puntos fijos donde la tensión alterna es máxima se llaman vientres de la onda estacionaria. Para nuestra línea con el extremo abierto, el vientre coincidirá con ese punto.

La corriente también formará ondas estacionarias pero con la distribución cambiada

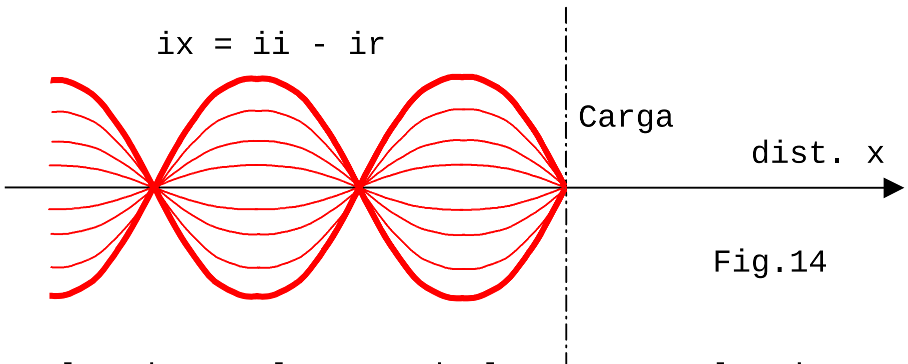


Fig.14

con el nodo en el punto de la carga y el primer vientre a λ/4 del mismo.

Se construye el diagrama vectorial para un instante t fijo cualquiera y para dos puntos de la línea: a la izquierda en la carga, y a la derecha en un punto entre el generador y la carga.

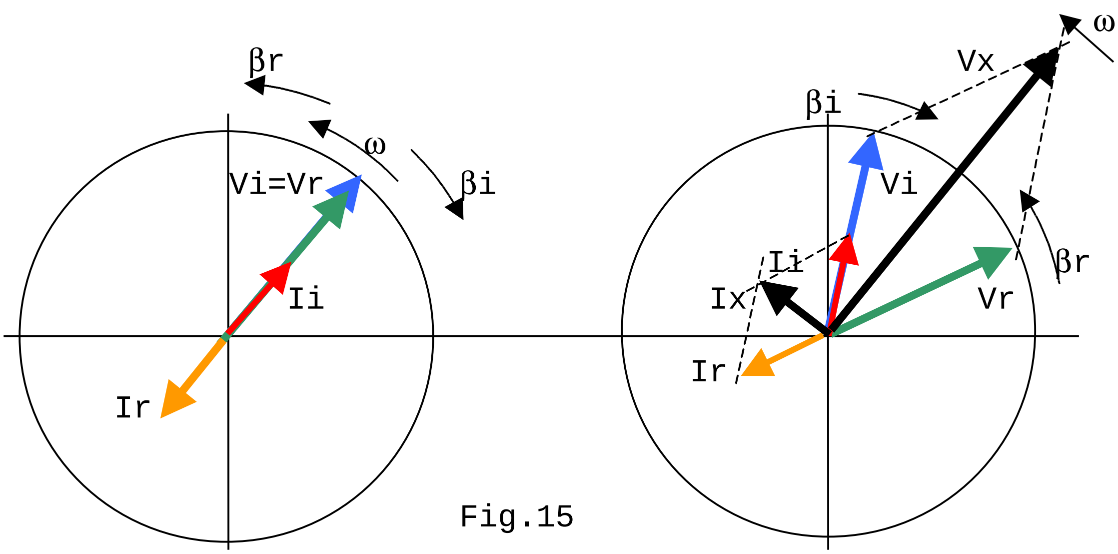


Fig.15

Para los puntos de la línea intermedios entre los nodos y los vientres de la onda, el vector tensión (Vx) y el vector corriente (Ix) - ver la figura de arriba-, son perpendiculares entre sí.

Como la relación entre tensión y corriente en cada punto de la línea nos da el valor de la impedancia en esos puntos, la perpendicularidad entre los vectores nos está indicando que esa impedancia es puramente reactiva (equivalente a un capacitor o a un inductor). En el caso de la figura de arriba, diagrama derecho, el punto de ordenada x está entre la carga y el primer nodo de la onda estacionaria de tensión, y allí el vector corriente está adelantado en 90° respecto al de tensión, delatando allí una impedancia capacitiva. Sin embargo, a medida que recorremos la línea vamos a ir encontrando zonas que pasan de capacitivas a inductivas y viceversa.

Si en ese punto x cortamos la línea eliminando el segmento desde x a la carga (que en este caso es un circuito abierto), podemos colocar en su lugar un capacitor de impedancia igual al que tenía la línea en ese punto

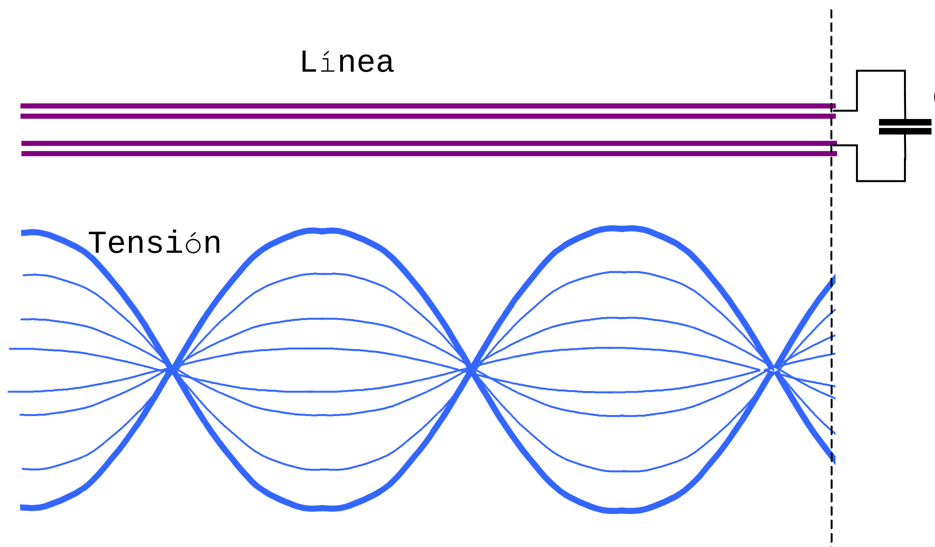


Fig.16

Para que esto ocurra la capacidad debe ser

$$C = \frac{Ix}{2 \pi f Vx} \quad \text{(Farad)}$$

Cortocircuito (Rc=0)

Una línea terminada en un cortocircuito formará ondas estacionarias similares a las anteriores defasadas en $\lambda/4$ respecto de aquéllas.

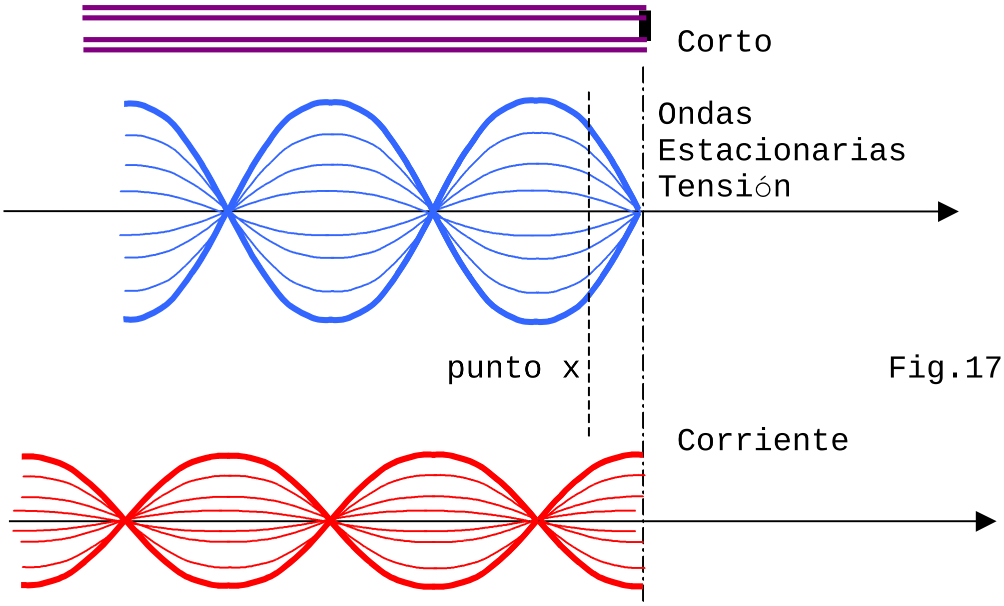


Fig.17

La corriente en la carga será máxima y la tensión, cero.
El coeficiente de reflexión (de tensión) es ahora

$$\Gamma = \frac{vr}{vi} = -1$$

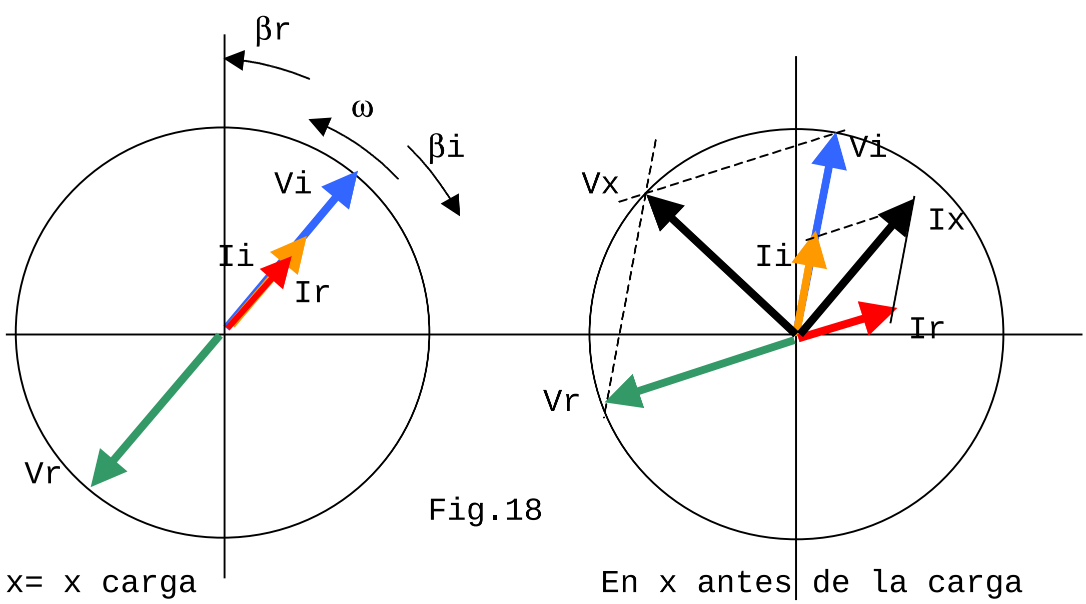


Fig.18

En x= x carga

En x antes de la carga

Otra vez los diagramas vectoriales de las tensiones y corrientes, en la carga y en un punto de la línea cercano a ella, hacia el generador.

Vemos como en la carga, la suma vectorial de las tensiones es cero, mientras que las corrientes se suman para dar un máximo de la onda estacionaria.

Un poco antes de la carga (punto x), se nota como la suma vectorial de las tensiones incidente (Vi) y reflejada (Vr), dan un vector tensión total (Vx) que es perpendicular al vector corriente, pero esta vez la tensión es la que adelanta respecto a la corriente, delatando que en ese punto la impedancia es inductiva.

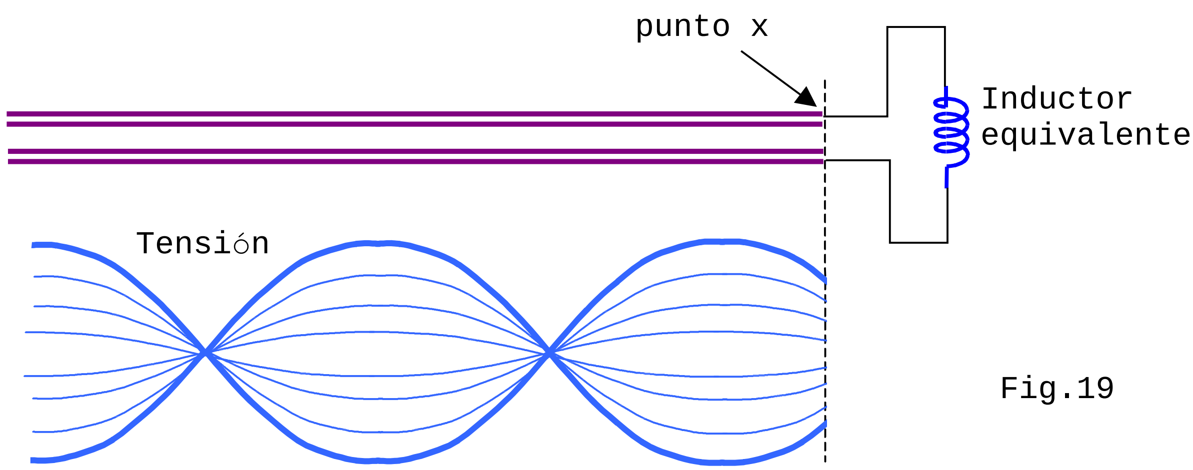


Fig.19

Como hicimos antes, la porción de línea desde el punto x se puede reemplazar por un inductor equivalente, que tiene la misma impedancia de entrada del tramo que va desde el punto x hasta la carga (cortocircuito en este caso).

Impedancia de entrada de una línea cargada

Hasta ahora hemos tenido una visión gráfica de las ondas a lo largo de una línea. Veremos a continuación algunas expresiones matemáticas complementarias que nos aclararán el concepto cuantitativo de ellas.

La impedancia de entrada de una línea sin pérdidas terminada con una impedancia cualquiera Zc se calcula con la siguiente expresión

$$Ze = Zo \; \frac{Zc + j\, Zo\, tg(\alpha\, d)}{Zo + j\, Zc\, tg(\alpha\, d)}$$

donde:
Ze: impedancia de entrada de la línea en Ohm
Zo: impedancia característica de la línea en Ohm
Zc: impedancia de la carga de terminación de la línea.
d: largo de la línea (metros)
α: $2\,\pi\,/\,\lambda$ (factor de fase) (1/metro)

El valor de λ tomado aquí es la longitud de onda de la señal en la línea, y generalmente es menor a la longitud de la onda en el vacío, especialmente cuando la línea está construída con material dieléctrico (polietileno, teflon, etc)

La expresión se aplica a una línea ideal, sin atenuación (pérdidas). En el caso de una línea muy larga, donde prepondere una atenuación considerable, la ecuación de la impedancia de entrada es algo más complicada y utiliza funciones hiperbólicas. Consideraremos solo líneas sin pérdidas en pos de ser más conceptuales en el desarrollo.

La impedancia característica (Zo) de una línea es siempre resistiva y por ello se representa con un valor real. Por otro lado la impedancia de terminación Zc puede ser resistiva, reactiva pura o una combinación de ambas, por lo que se representa por un número complejo. El valor de la impedancia de entrada Ze también tiene la misma característica que la última.

$$Zc = Rc + j\, Xc$$

$$Ze = Re + j\, Xe$$

donde

j: $\sqrt{-1}$ (factor base de los números imaginarios)

Rc: Resistencia de carga   Re: Resistencia de entrada
Xc: Reactancia de carga   Xe: Reactancia de entrada

Todos estos parámetros tienen como unidad el Ohm.

Impedancia de entrada de una línea en corto o abierta

La impedancia de entrada de una línea terminada en corto o abierta es siempre reactiva pura. Esto ya se vió en el apartado anterior donde reemplazamos una porción de ella por un capacitor o por un inductor.

La expresión de la impedancia de entrada se simplifica en estos casos

Circuito abierto Zc = infinito

dividiendo denominador y numerador por Zc y despreciando Zo/Zc **à** 0 queda

$$Ze = Zo \frac{1}{j\, tg(\alpha\, d)} = -\, j\, Zo\, cotg\, (\alpha\, d)$$

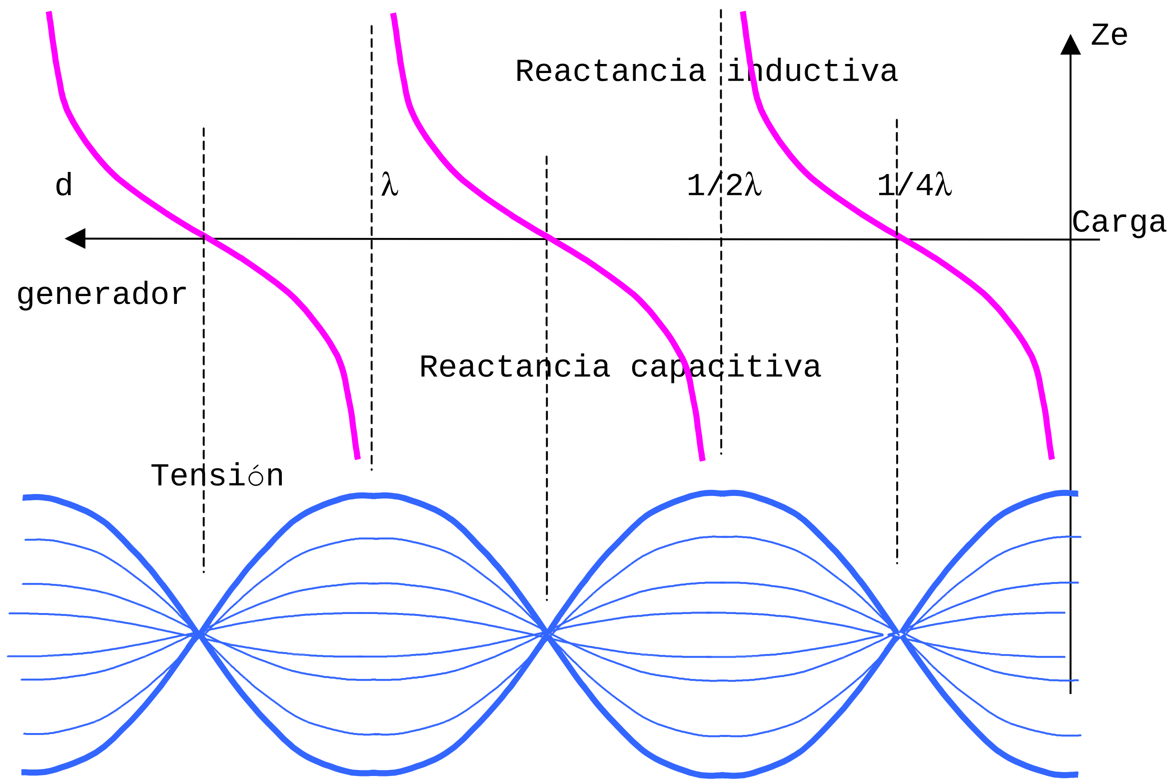


Fig.20

Vemos arriba que una línea abierta de logitud cero tiene impedancia de entrada infinita, pero si tiene un largo de solo 1/4λ , la impedancia de entrada cae a cero. Además, luego del 1/4λ de largo, la impedancia es una reactancia inductiva (signo positivo). Estas variaciones de impedancia se repiten indefinidamente a medida que la línea se va agrandando valores enteros de l.

Corto circuito Zc = 0

Cuando la línea está terminada en un cortocircuito, la impedancia de entrada es

$$Ze = j\ Zo\ tg\ (\alpha\ d)$$

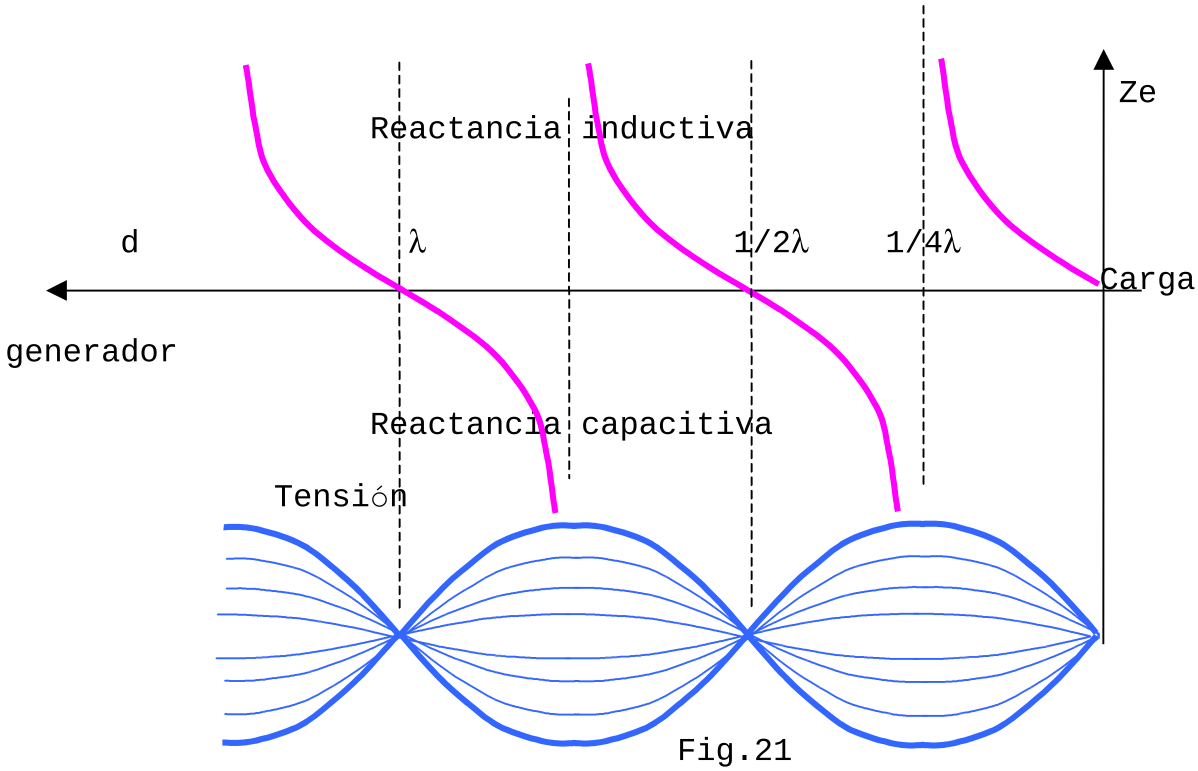


Fig.21

también toma valores imaginarios, es decir, son reactancias puras. En la carga la reactancia parte de cero (cortocircuito) y va aumentando la reactancia inductiva (positiva) a medida que tomamos líneas de mayor longitud. A un largo de 1/4λ , la reactancia se hace infinita y pasa de positiva a negativa.

Los ejemplos presentados de circuito abierto y cortocircuito son casos muy particulares. En la mayoría de las circunstancias en las que nos encontramos en la práctica, la impedancia de carga tiene cualquier valor, incluso mayormente de característica compleja.

Veremos dos casos de impedancia de carga (Zc) resistiva pura. Una de menor valor que Zo y otra mayor que Zo.

Línea terminada en una resistencia < Zo

El coeficiente de reflesión en la carga se puede calcular partiendo de las impedancias característica de la línea y la de carga

$$\Gamma = \frac{Vr}{Vi} = \frac{Zc - Zo}{Zc + Zo}$$

como en el caso planteado es Zc < Zo, el numerador de la expresión de arriba es negativo. Esto significa que la onda de tensión reflejada estará invertida con respecto a la incidente (como era el caso de Zc=0). La amplitud de esta onda reflejada será menor a la de la incidente.

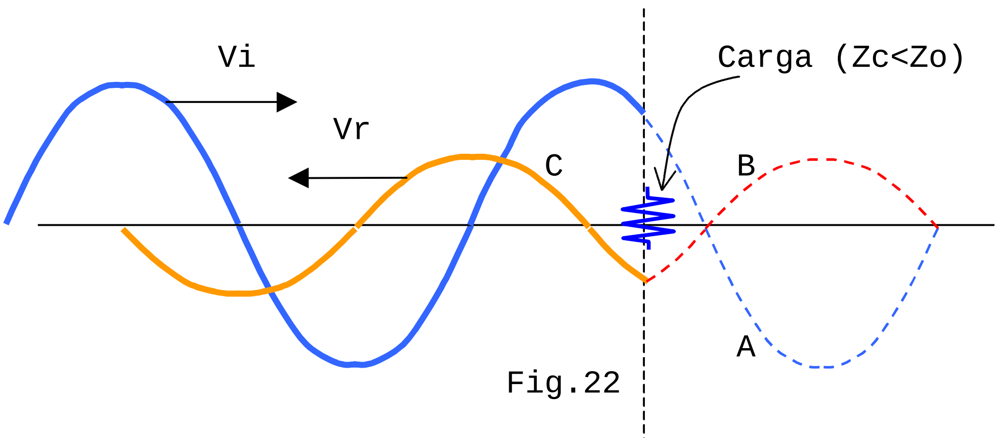


Fig.22

En el gráfico, que es una instantánea de las tensiones en la línea, se muestra la onda de la tensión incidente (Vi) llegando a la carga y la onda de tensión reflejada (Vr) de menor amplitud que la primera. Algo de la potencia transmitida por la línea desde el generador se disipa en la carga, y la otra parte vuelve al mismo por medio de la onda reflejada.

Para dibujar la onda reflejada, se continúa un trozo de la onda incidente luego de la carga (A). Se invierte verticalmente y se reduce de tamaño (B) de acuerdo al módulo del coeficiente de reflexión (Γ). Finalmente se invierte horizontalmente (C) constituyendo la onda reflejada (Vr).

La tensión en cada punto de la línea medida por un instrumento adecuado, revela que aparecen ondas estacionarias, pero en los nodos la tensión no llega a cero. Esta tensión de cada punto será la suma algebraica de las tensiónes incidente y reflejada, dando el siguiente diagrama.

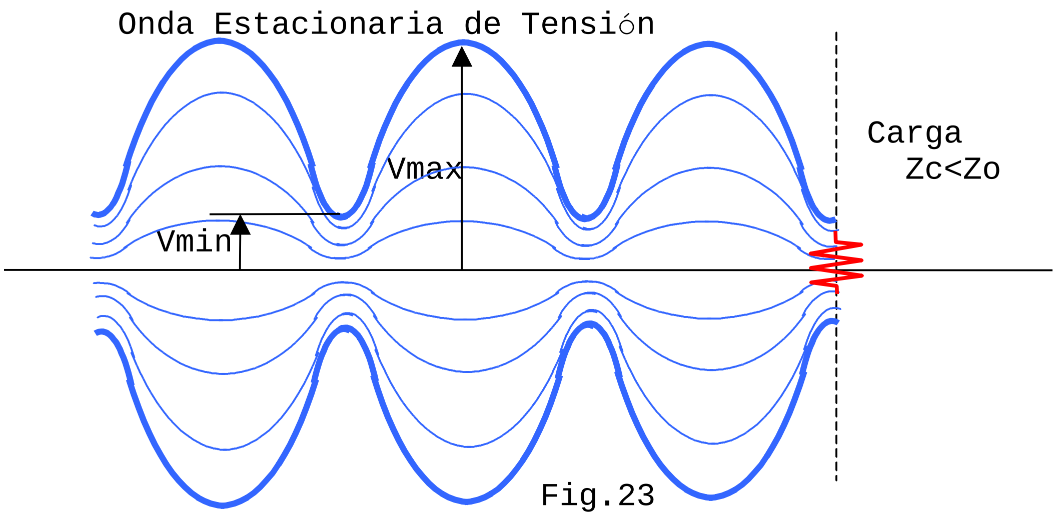


Fig.23

Existe una relación numérica muy utilizada por la técnica de la transferencia de energía por líneas de transmisión que es la Relación de Ondas Estacionarias (ROE) definida como.

$$ROE = \frac{|Vmáx|}{|Vmín|} \quad \text{(módulos)}$$

Siempre es deseable que la transferencia de energía sea la máxima posible. En este caso, toda reflexión de ondas será perjudicial. Esta reflexión de ondas se manifiesta por la aparición de ondas estacionarias, fácilmente detectables en la línea.

De este modo el valor del ROE ideal es ROE = 1.

Línea terminada en una resistencia Zc > Zo

Este caso es similar al anterior salvo por los lugares donde se producen los nodos y los vientres de las ondas estacionarias.

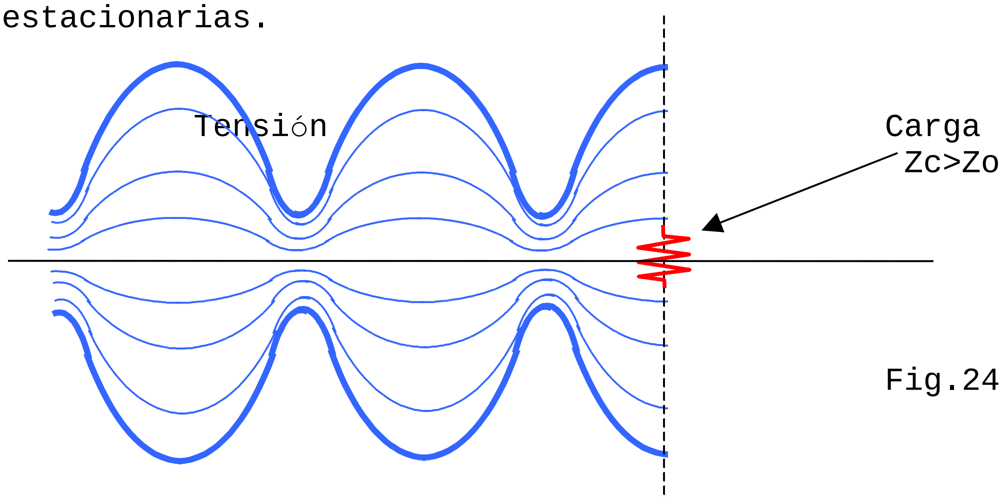
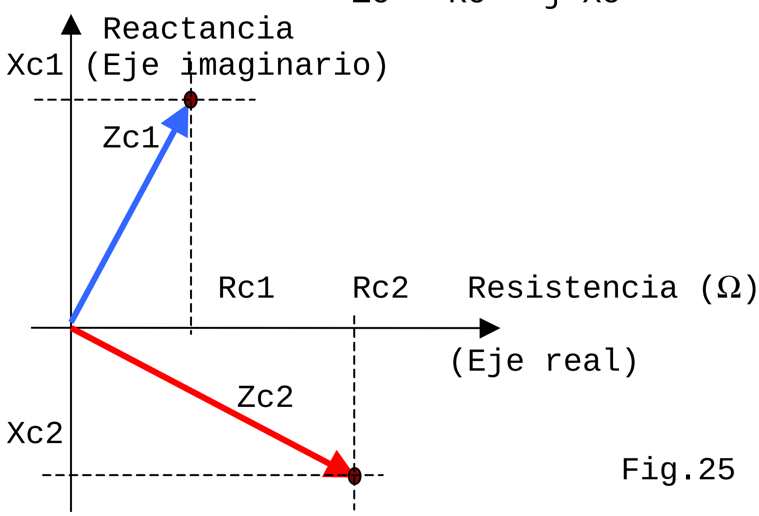


Fig.24

El valor de Γ es ahora mayor que cero (positivo). Basta con ver la expresión matemática que lo define, establecida arriba. De cualquier modo, el módulo de Γ es siempre menor que 1. Hablamos del *módulo* justamente porque, en general, el coeficiente de reflexión Γ es un número complejo, formado por la suma de un número real y uno imaginario.

Esto lo podemos entender fácilmente cuando la impedancia de carga está compuesta por un resistor y una reactancia.

$$Zc = Rc + j\ Xc$$



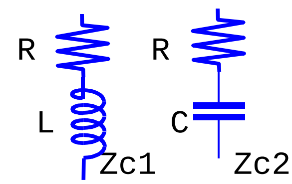


Fig.25

En el gráfico tenemos dos ejemplos. El caso de Zc1 es el formado por una resistencia en serie con una reactancia inductiva(Xc1). Para Zc2, la reactancia es capacitiva (-Xc2, negativa).

El módulo de las impedancias está representado por el largo del vector.

$$|Zc| = \sqrt{Rc^2 + Xc^2}$$

y los valores de las reactancias en función de los parámetros de inductancia (Henry) y capacitancia (Farad) son

$$Xc1(Ohm) = 2\ \pi\ f\ L = \omega\ L$$

$$Xc2(Ohm) = \frac{1}{2\ \pi\ f\ C} = 1 / \omega\ C$$

Las unidades son

L: Inductancia de la bobina en Henry
C: Capacidad del capacitor en Farad
f: Frecuencia de la onda en Hertz (ciclos por segundo)

Es normal encontrar en la práctica la inductancia o la capacidad medidas en submúltiplos de las unidades de referencia dadas arriba. Así las bobinas se miden en miliHenry(mHy=10^{-3} Hy), microHenry(μF=10^{-6} Hy) o nanoHenry(nHy=10^{-9} Hy). Los capacitores, por otro lado, en microFarad (μF=10^{-6} F), nanoFarad (nF=10^{-9} F) y picoFarad (pF=10^{-12}F). Antes de hacer el cálculo de la reactancia con la fórmula dada arriba, se deben expresar los parámetros L y C en las unidades de referencia, a fin de obtener las reactancias en Ohm.

El coeficiente de reflexión para una impedancia compleja (Z) será

$$\Gamma = \frac{Z - Zo}{Z + Zo} = \frac{R + jX - Zo}{R + jX + Zo}$$

operando queda

$$\Gamma = \frac{r^2 + x^2 - 1}{(r + 1)^2 + x^2} + j \frac{2x}{(r + 1)^2 + x^2}$$

donde

$$r = \frac{R}{Zo} = \text{resistencia normalizada}$$

$$x = \frac{X}{Zo} = \text{reactancia normalizada}$$

Entonces, el coeficiente de reflexión es también un valor complejo, con una parte real y otra imaginaria como se ve en la ecuación de arriba.

Admitancia

La admitancia es un parámetro circuital que se define matemáticamente como la inversa de la impedancia

$$Y = \frac{1}{Z} = G + j\,B$$

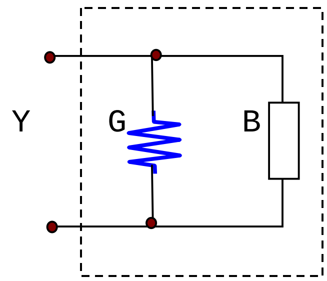


Fig.26

donde

Y: admitancia (Mho = 1/Ohm)
G: conductancia (Mho)
B: Suceptancia (Mho)

Equivalencia impedancia-admitancia

La impedancia de un dispositivo puede traducirse a valores de admitancia y viceversa, lo que manfiesta una total equivalencia entre ellas.

Por ejemplo, si tenemos $Z = R + jX$ hacemos

$$Y = \frac{1}{R + j\,X}$$

operando

$$Y = \frac{R}{R^2 + X^2} - j\,\frac{X}{R^2 + X^2}$$

lo mismo se puede hacer partiendo de una admitancia

Transformador de impedancias de ¼ de onda

Un recurso muy usado cuando se necesitan adaptar impedancias de diferente valor, es la inserción de un trozo de línea estratégicamente diseñado que actúa como tramo de transición entre las dos impedancias diferentes. Este transformador tiene la virtud de evitar las ondas estacionarias en las dos líneas.

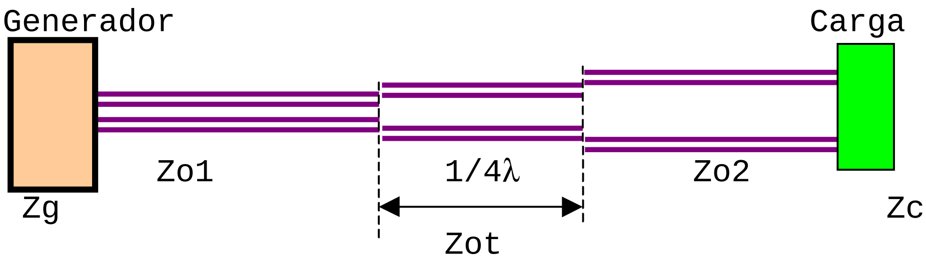


Fig.27

Aquí el generador tiene una impedancia de salida Zg de igual valor a la de la línea (Zo1) que está alimentando. Por otro lado, la carga (Zc) está acometida por otra línea de igual impedancia caracteristica que ella (Zo2), es decir que tanto el generador como la carga están adaptados a las líneas a las que están conectados directamente. Sin embargo entre las líneas existe un problema pues sus impedancias características difieren.

$$Zo1 \neq Zo2$$

El problema se resuelve colocando un trozo de línea, con largo equivalente a 1/4λ, con una impedancia característica Zot, que sale de lo siguiente.

Si recordamos la ecuación de la impedancia de entrada que posee una línea cargada con una impedancia de carga Zc

$$Ze = Zo \frac{Zc + j\ Zo\ tg(\alpha\ d)}{Zo + j\ Zc\ tg(\alpha\ d)}$$

vemos que si hacemos que la línea tenga un largo de 1/4λ, la tangente trigonométrica en la fórmula tiende a infinito. Si dividimos numerador y denominador por tg(α d), la ecuación se simplifica a

$$Ze = Zo \frac{j\ Zo}{j\ Zc}$$

o sea

$$Ze = \frac{Zo^2}{Zc}$$

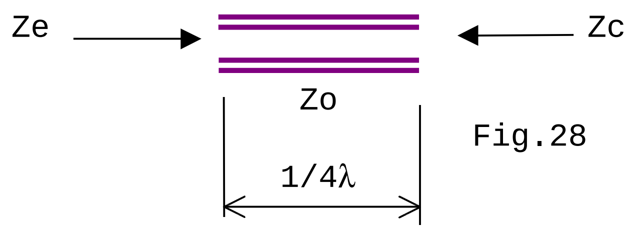


Fig.28

Esto nos dice que para adaptar dos impedancias diferentes, se puede colocar un trozo de longitud 1/4λ cuya impedancia característica sea

$$Zo = \sqrt{Ze\ \ Zc}$$

Esto aplicado al problema anterior resulta en

$$Zot = \sqrt{Zo1\ \ Zo2} = \sqrt{Zg\ \ Zc}$$

De este modo evitamos las ondas estacionarias en las líneas de impedancia Zo1 y Zo2. Sin embargo, en la línea que oficia de transformador sí existen.

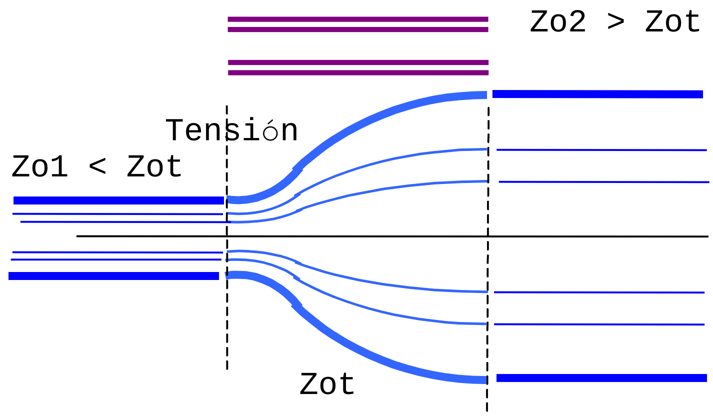
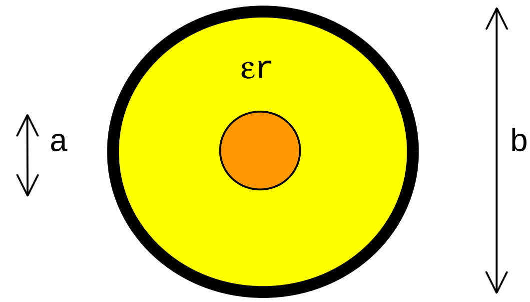


Fig.29

Impedancia característica de líneas de uso común

La impedancia característica de las líneas depende de sus constantes geométricas y del material aislador que separa los conductores. Los materiales aisladores, al estar sometidos a una tensión eléctrica se polarizan, haciendo disminuir el campo eléctrico total en él.

Para un cable coaxil cuyo diámetro de blindaje es b, el diámetro del conductor central es a, y la constante dieléctrica del aislante es εr, resulta



$$Zo\,(Ohm) = \frac{60}{\sqrt{\varepsilon r}} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

fig.30

Para el caso de una línea bifilar es

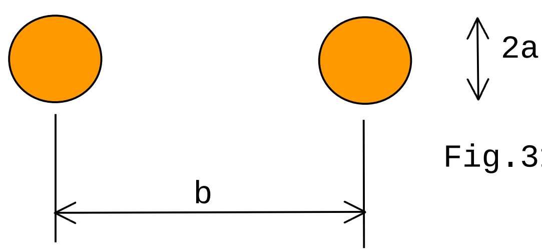


Fig.31

$$Zo(Ohm) = 276 \log\left(\frac{b}{a}\right)$$ (en el aire o vacío)

En este caso el logaritmo es en base 10.

Un conductor sobre un plano de tierra también presenta una impedancia característica

$$Zo(Ohm) = \frac{60}{\sqrt{\varepsilon r}} \ln\left(\frac{4h}{d}\right)$$

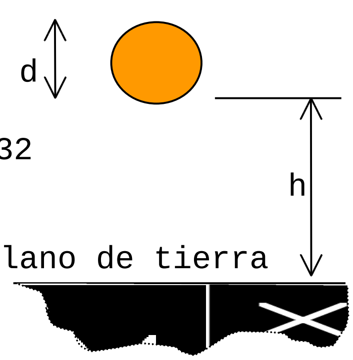


Fig.32

Reflexiones múltiples

Hasta ahora vimos que las ondas que transmiten energía por una línea solo se reflejaban en la carga cuando ésta estaba desadaptada a la impedancia característica de la línea. Sin embargo, no hablamos del generador.

Si la carga está desadaptada, parte de la energía incidente será reflejada en ella y viajará hacia el generador. Cuando llegue a éste, verá en él otra impedancia de "carga". Si la impedancia del generador está también desadaptada con respecto a la línea habrá otro rebote de parte de esa energía, que volverá a viajar hacia la carga verdadera. Esto se puede repetir indefinidamente hasta que las ondas resultantes de estas múltiples reflexiones tengan valores despreciables.

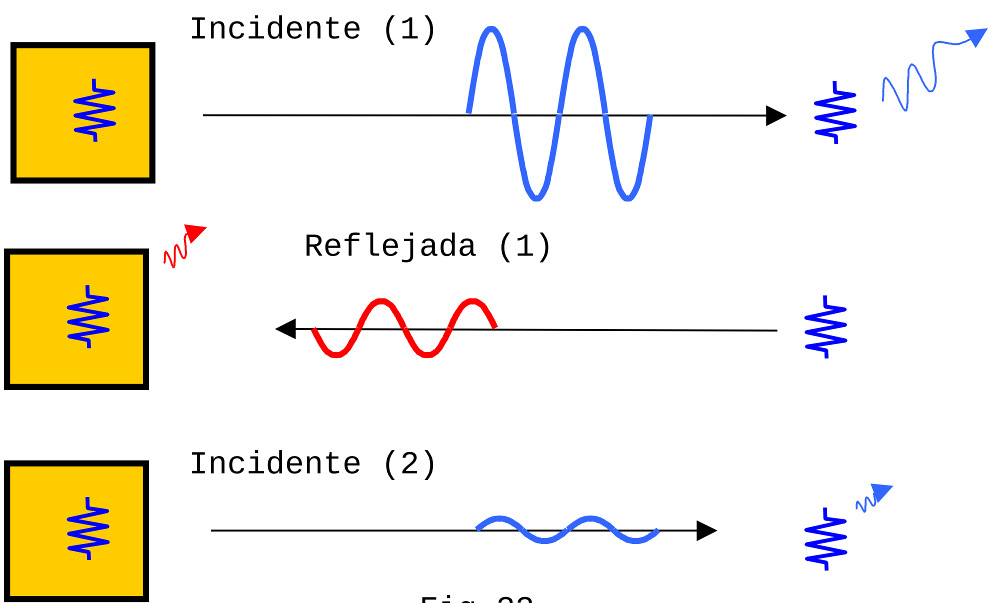


Fig.33

Un caso particular conocido donde esto ocurre es en el caso presentado arriba del transformador de 1/4l. En estos casos las ondas incidentes parciales se sumarán vectorialmente en una total, y lo mismo sucede con las reflejadas dejando válidos todos los razonamientos explicados hasta ahora.

Carta de Smith

Como se explicó anteriormente, el coeficiente de reflexión resulta ser un número complejo, con una parte real y otra imaginaria.

Por otro lado, existen tres formas comunes de escribir un complejo (z)

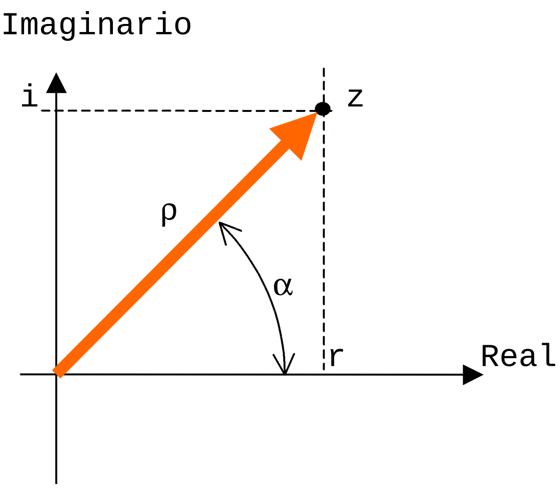
$z = r + j\, i$ (r: parte real, i: parte imaginaria)

$z = \rho\, (\cos \alpha + j \operatorname{sen} \alpha)$ (ρ: módulo, α: argumento angular)

$z = \rho\, e^{ja}$ (ρ: módulo, α: argumento angular)

Para comprender el significado de cada símbolo recurrimos a la representación gráfica de un complejo en un sistema de ejes cartesianos, donde en el horizontal se anotan los valores de la parte real de los complejos, y su parte imaginaria se represnta en el vertical.

Fig.34 La representación de un número complejo requiere un mínimo de dos datos. En la forma binomial, se especifica la parte real y la imaginaria. En los modos polares, los datos son el módulo y el argumento angular, que es el ángulo entre el vector y el eje Real.



Es necesario que el lector busque el tema de calculo de complejos en algún libro de matemáticas apropiado, de los que abundan.

La representación gráfica en el campo complejo (así se llama al entorno del sistema coordenado de ejes Real e Imaginario dibujado arriba) del coeficiente de reflexión (Γ) es un vector cuyo módulo no puede sobrepasar la unidad. Esto es lógico, pues una carga desadaptada no puede reflejar más potencia de la que en ella incide. A lo sumo, podrá reflejar *toda* la potencia incidente (cortocircuito o circuito abierto, entre otras posibilidades que veremos).

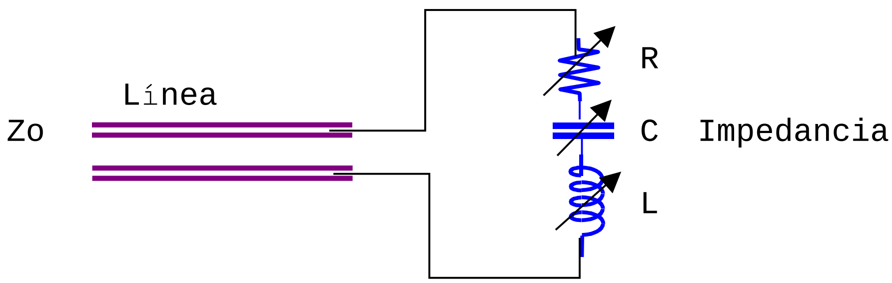
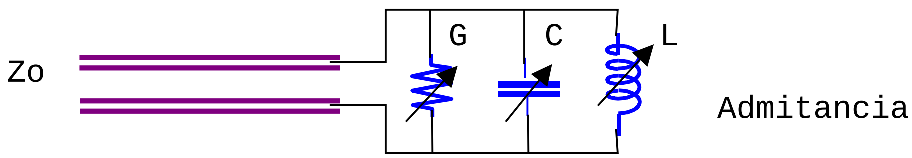


Fig.35



En el gráfico vemos una línea cargada con una Impedancia y otra con una admitancia.

En la *impedancia* de carga tenemos

R: Resistencia (Ohm)

Xc: Reactancia capacitiva (Ohm): $\dfrac{1}{j\,\omega\,C} = -j\,\dfrac{1}{\omega\,C}$ (negativa)

Xl: Reactancia inductiva (Ohm): $j\,\omega\,L$ (positiva)

Por otro lado, en la *admitancia* de carga será

G: Conductancia (Mho)

Bc: Suceptancia capacitiva (Mho) $j\,\omega\,C$ (positiva)

Bl: Suceptancia inductiva (Mho) $\dfrac{1}{j\,\omega\,L} = -j\,\dfrac{1}{\omega\,L}$ (negativa)

Como se dijo antes, una se puede convertir en la otra en forma reversible según la conveniencia para el cálculo.

Si se representa el vector Γ en el campo complejo encontraremos interesantes propiedades (carta de Smith).