

nte

de reflexión de una impedancia  
donde se varíe solo la reactancia  
(capacidad o inductancia)  
dejando constante la  
resistencia, se  
encuentra que

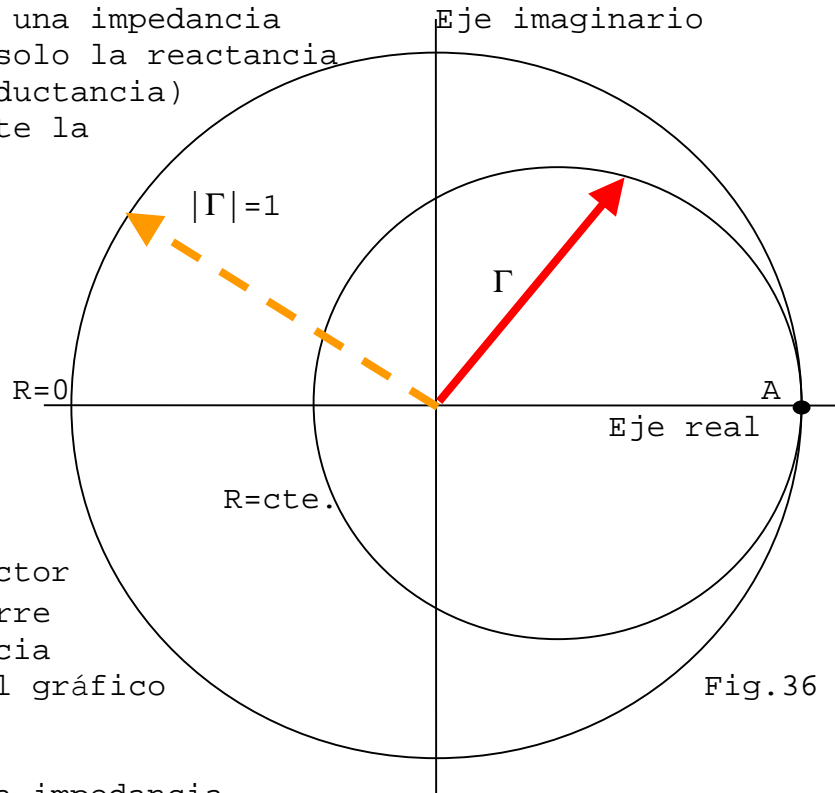
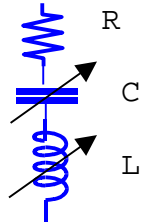


Fig.36

la punta del vector  
complejo  $\Gamma$  recorre  
una circunferencia  
como se ve en el gráfico  
( $R=cte.$ )

En el caso de la impedancia  
que pusimos como ejemplo, la reactancia total será

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

por lo que puede tener signo negativo o positivo. ( $L$  y  $C$  son siempre positivos).

La circunferencia externa, que resulta del recorrido de la punta de  $\Gamma$  de módulo=1 (reflexión total), corresponde a una resistencia de carga  $R=0$  (cortocircuito), salvo el punto A que corresponde a  $R=\infty$ .

Por otro lado, si ahora dejamos fijado un valor de reactancia, y solo variamos la resistencia, el recorrido de la punta del vector complejo  $\Gamma$  sigue otra circunferencia cuyo centro se encuentra fuera de la circunferencia de  $|\Gamma|=1$

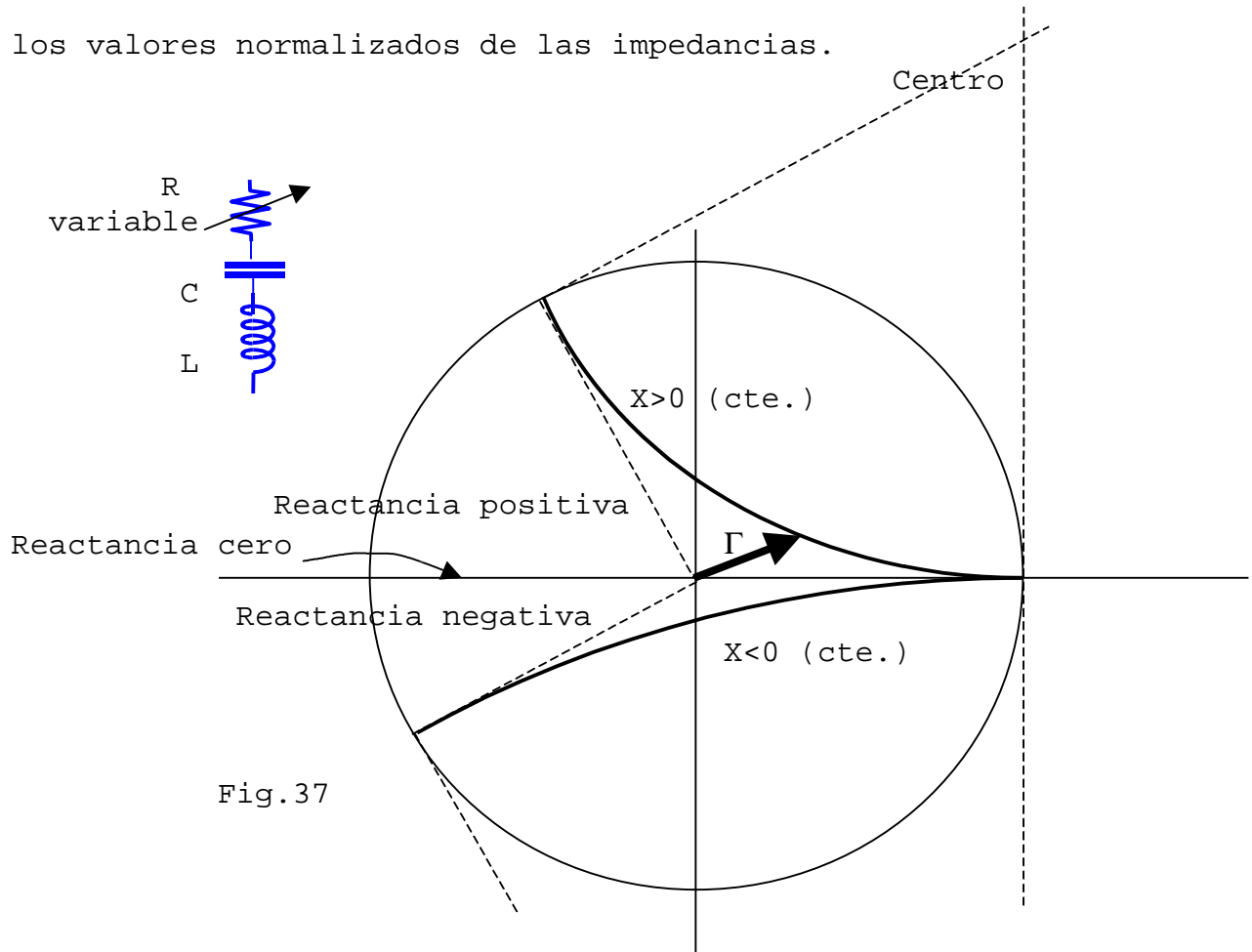
Esta es la base teórica del diagrama de Smith. Como el coeficiente de reflexión en una línea de transmisión depende de su impedancia característica ( $Z_0$ ), los radios de las circunferencias estarán determinados por las relaciones entre

la impedancia de carga ( $Z_c$ ) y la característica de la línea ( $Z_o$ ). Por ejemplo se define

$$r = \frac{R_c}{Z_o} = \text{resistencia normalizada}$$

$$x = \frac{X}{Z_o} = \text{reactancia normalizada}$$

Son los valores normalizados de las impedancias.



En el dibujo vemos dos ejemplos de arcos de circunferencia descriptos por la punta del vector  $\Gamma$  para  $X=\text{cte.}$  El arco sobre el eje horizontal corresponde a una reactancia positiva constante (a medida que  $R$  va variando). y para reactancias negativas, los arcos de circunferencia se dan por debajo del eje horizontal. Sobre el mismo eje, la reactancia es cero.

Como vemos en los ejemplos graficados, las circunferencias que representan coeficientes de reflexión de impedancias cuyas resistencias son constantes, aunque varíen sus reactancias (Fig.36) tienen su centro sobre el eje horizontal y siempre

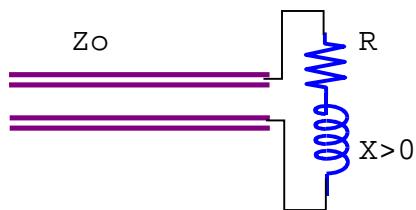
son tangentes a la circunferencia que corresponde a  $|\Gamma|=1$  (punto A).

El radio de esas circunferencias de  $r=\text{cte}$  es

$$\text{radio} = \frac{1}{r + 1} \quad (r=\text{cte.})$$

(recordar que  $r$  es el valor normalizado de  $R_c$ ).  
 Por ejemplo, cuando el valor de la resistencia de carga es  $R_c = Z_o$  se cumple que

$$\text{radio} = \frac{1}{1 + 1} = 1/2$$



Por otro lado, el radio de las circunferencias de  $x=\text{cte}$  es

$$\text{radio} = \frac{1}{x} \quad (x=\text{cte.})$$

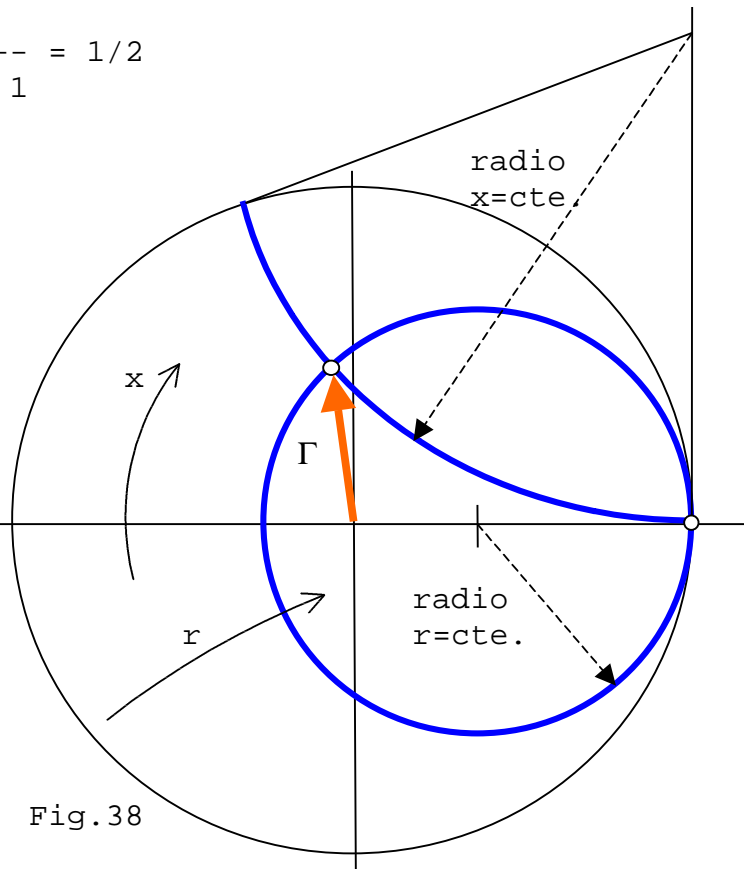


Fig.38

En la Fig.38 se marcó el punto correspondiente a la impedancia de carga del ejemplo de la izquierda. Se trazó un círculo de  $r=\text{cte}$  con un radio

$$\text{radio } (r=\text{cte.}) = \frac{1}{R/Z_o + 1}$$

y un arco de circunferencia de  $x=\text{cte}$ , de radio

$$\text{radio (x=cte.)} = \frac{1}{X/Z_0}$$

La intersección de las dos curvas es la punta del vector coeficiente de reflexión en el punto de la línea donde se sitúa la carga.

### Evolución del coeficiente de reflexión a lo largo de la línea

En el ejemplo anterior se determinó la ubicación en la carta de Smith del vector coeficiente de reflexión en el punto de la línea donde está la carga.

Sin embargo, si nos movemos a lo largo de la línea, hacia el generador, el vector cambiará de orientación pero no de módulo.

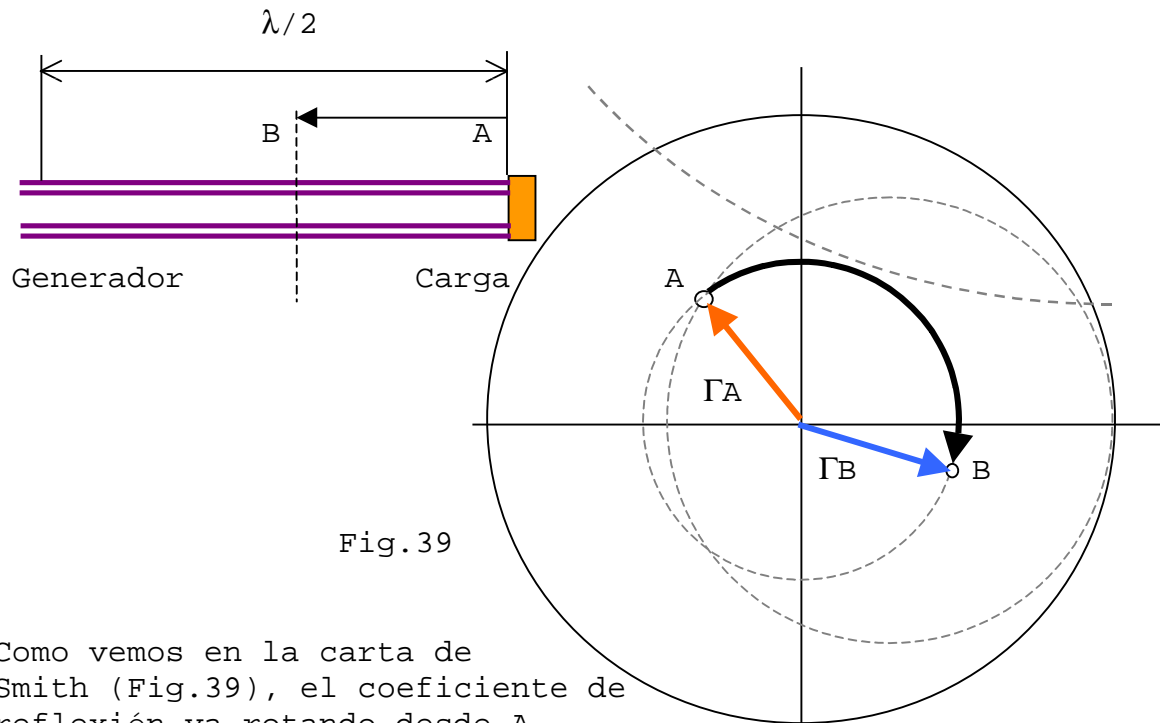


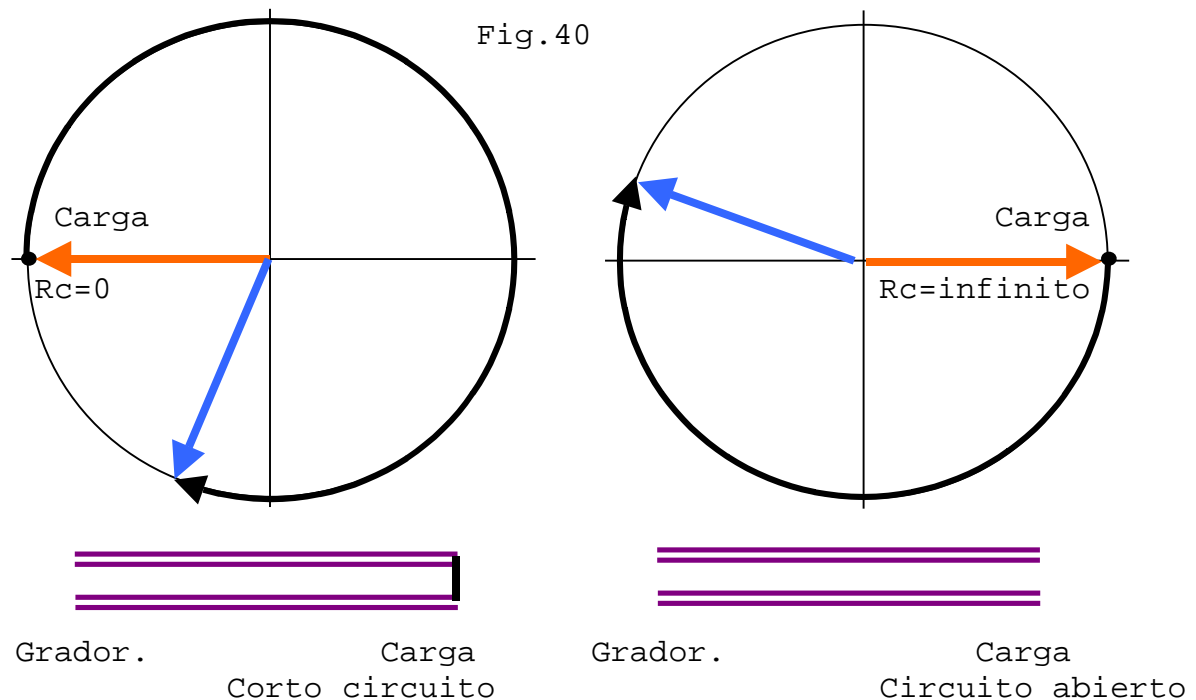
Fig.39

Como vemos en la carta de Smith (Fig.39), el coeficiente de reflexión va rotando desde A en la carga, hasta B, en el punto B de la línea de transmisión. Cuando nos trasladamos hacia el generador, el vector  $\Gamma$  rota hacia la derecha, y viceversa.

Cuando nos desplazamos una longitud equivalente a  $\lambda/2$  sobre la línea, el vector  $\Gamma$  rota una vuelta completa.

Los casos especiales donde la carga es un corto o un circuito abierto se pueden ver representados también en la carta de

Smith, al graficar el coef. de reflexión  $\Gamma$  a lo largo de la línea, cuando nos desplazamos de la carga al generador.



En estos dos casos, la punta del vector  $\Gamma$  recorre la circunferencia límite de radio=1 ( $|\Gamma|=1$ ) hacia la derecha, a medida que nos movemos a lo largo de la línea hacia el generador, rotando una vuelta cada  $\lambda/2$  recorrido.

ROE: Como el valor de la Relación de Ondas Estacionarias de una línea tiene relación directa con el módulo del vector  $\Gamma$ , las circunferencias concéntricas en la carta de Smith, que representan rotaciones del vector  $\Gamma$  de módulo constante, también serán circunferencias de ROE constante y de valor

$$\text{ROE} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}$$

## Admitancias en la carta de Smith

La carta de Smith también presenta curvas simples cuando se trata de representar admitancias (inversa de las impedancias) en ella.

Por ejemplo, si consideramos una línea terminada en una admitancia (admitancia de carga), de conductancia  $G(\text{Mho})$  y Suceptancia  $B(\text{Mho})$ . Es conveniente ahora referirse a la línea por su Admitancia Característica

Si se tiene una impedancia  $Z$  de forma que

$$Z = R + jX$$

la admitancia es la inversa de la impedancia, o sea

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R+jX} = \frac{R}{R^2+X^2} - j \frac{X}{R^2+X^2} = G + jB$$

En el caso de la línea de impedancia característica  $Z_o$  es

$$Y_o = 1/Z_o$$

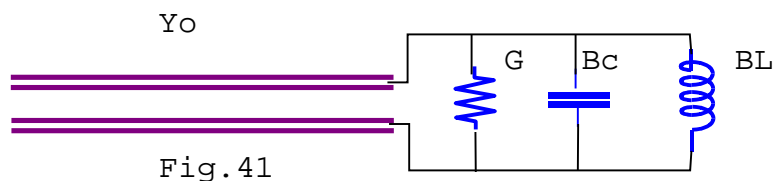


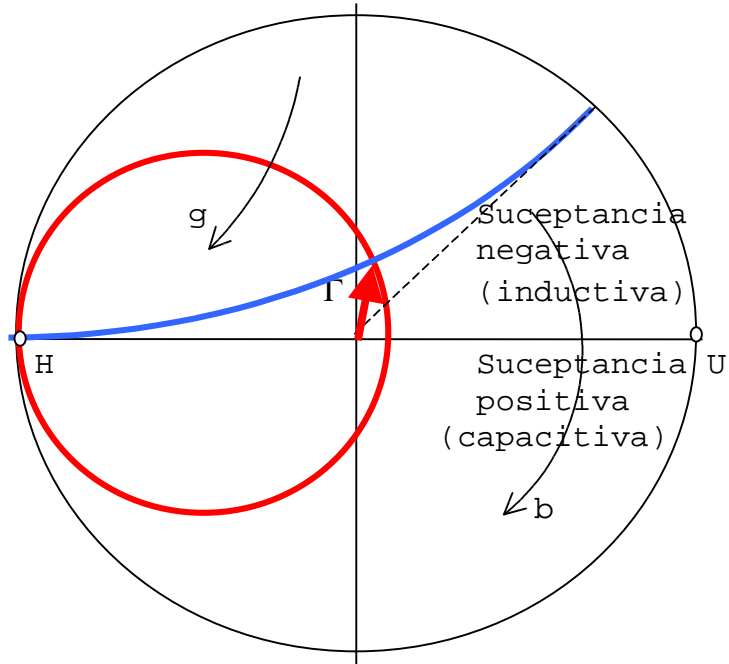
Fig.41

Vemos una línea cargada con una admitancia formada por una conductancia ( $G$ ) y una suceptancia ( $B$ ). A su vez la suceptancia está causada por un capacitor (suceptancia positiva) y un inductor (suceptancia negativa). La suceptancia total del circuito es

$$B \text{ (Mho)} = B_c + B_L = \omega C - \frac{1}{\omega L}$$

con  $C$  en Farad,  $L$  en Henry y  $\omega$  en radianes por segundo.

Fig.42 Las circunferencias de conductancia ( $g$ ) constante tiene radios decrecientes a medida que aumenta la conductancia, y son tangentes al punto extremo izquierdo de la carta. Las circunferencias de susceptancia ( $b$ ) constante tienen centros externos. La circunferencia contorno representa  $g=0$ .



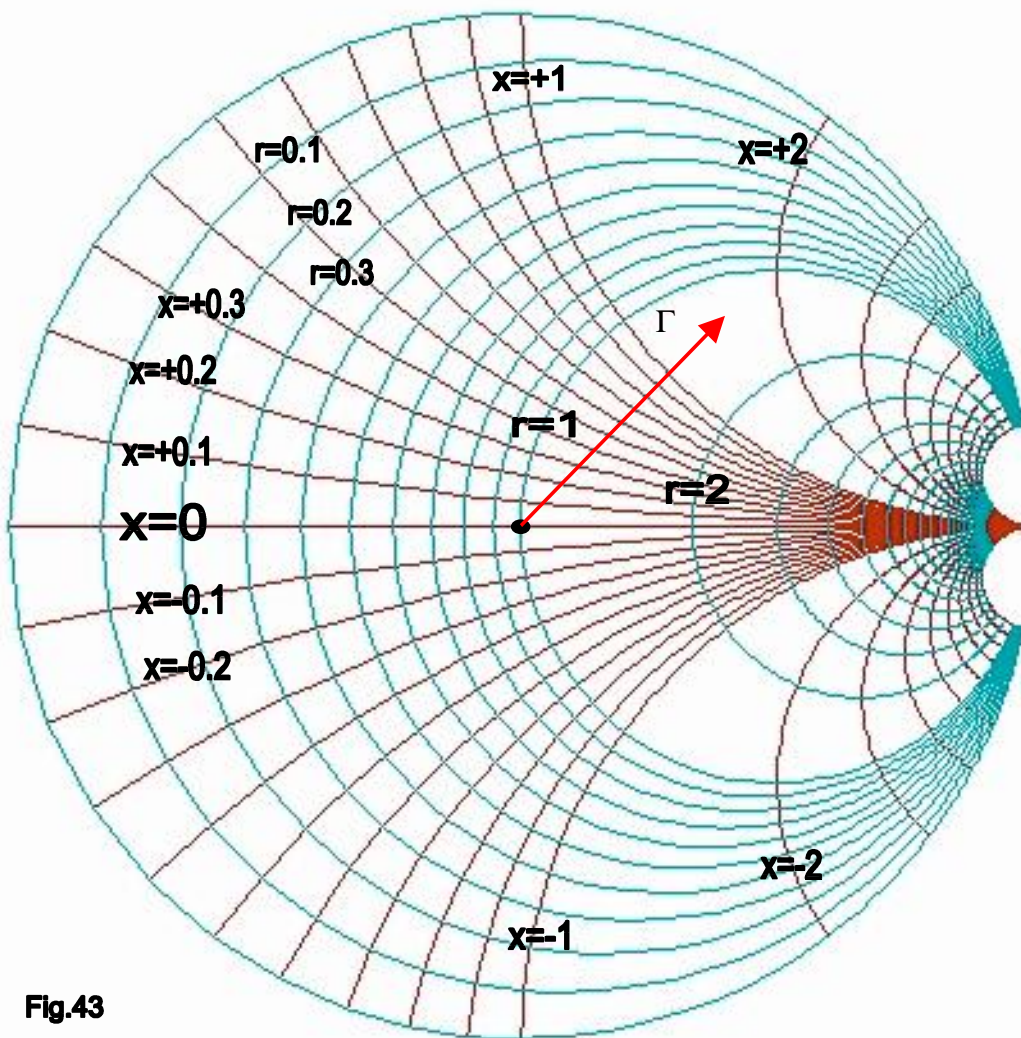
Las circunferencias de  $g=\text{constante}$  disminuyen su radio a medida que crece el valor de la conductancia, de modo que cuando ésta se hace infinita (cortocircuito) la circunferencia correspondiente degenera en un punto (H), aunque se le agregue en paralelo cualquier reactancia.

La condición opuesta (circuito abierto)  $g=0$ , se da en el punto U.

Logicamente estos puntos correspondientes a las condiciones circuitales mencionadas, coinciden con lo que se vió antes con la carta de Smith para Impedancias (Fig.38), ya que las dos cartas son la representación del mismo vector coeficiente de reflexión ( $\Gamma$ ).

La carta de Smith es realmente la superposición de la carta vista para Impedancias con la de Admitancias.

Una carta de Smith para impedancias se ve graficada en la Fig.43 donde se ven las dos clases de circunferencias descritas más arriba, unas para resistencias constantes y las otras de reactancias constantes.



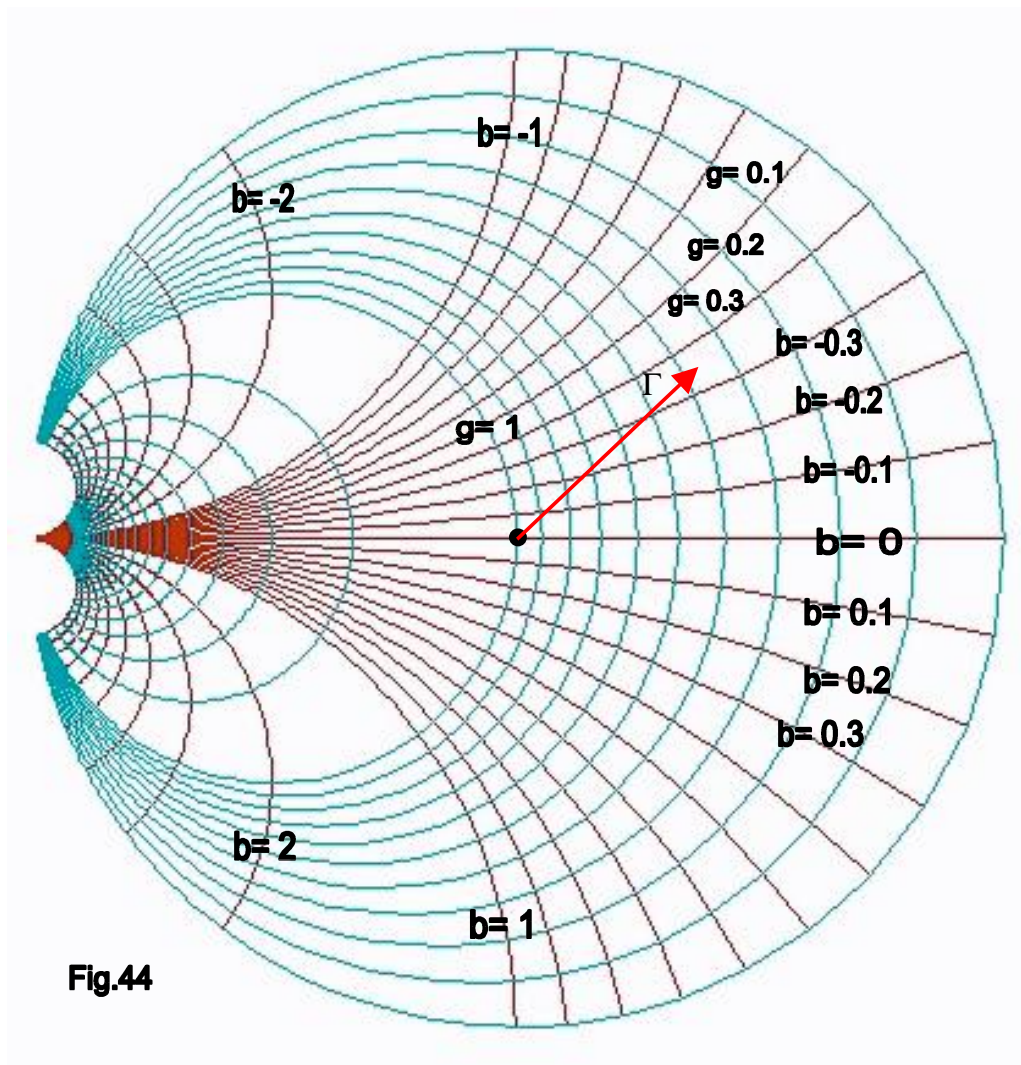
**Fig.43**

El punto central de la carta corresponde a una impedancia  $Z=Z_0$ , representando condiciones de adaptación entre línea y carga.

Tanto las resistencias ( $r$ ) como las reactancias ( $x$ ) en minúscula significan valores normalizados con la impedancia característica de la línea ( $Z_0$ ).

Si ahora al campo de existencia complejo del vector  $\Gamma$ , le agregamos las curvas de admitancia, es decir, de conductancia constante y de susceptancia constante se obtiene una carta que es la reflexión especular de la de impedancias.





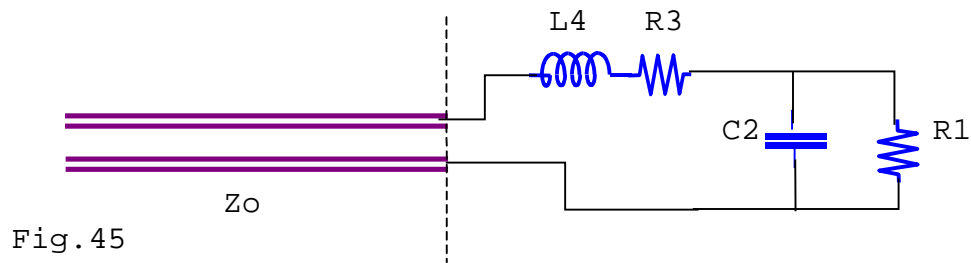
**Fig.44**

El punto central de la carta de Smith para admitancias representa  $Y=Y_0$ . Se debe tener presente que si la impedancia característica de la línea es  $Z_0=50 \text{ Ohm}$ , la admitancia característica será  $Y_0=1/50 \text{ Mho}$ , es decir  $Y_0=0.02 \text{ Mho}$ .

#### **Ejemplos prácticos. Representación de una carga.**

Veremos algunos ejemplos prácticos donde se va a graficar la ubicación del coeficiente de reflexión complejo  $\Gamma$  correspondiente a la carga de una línea de transmisión de impedancia característica  $Z_0=50 \text{ Ohm}$  ( $Y_0=0.02 \text{ Mho}$ )

Ejemplo 1:



La carga está compuesta por cuatro componentes, y está ubicada al final de la línea de transmisión. Los valores de los componentes y de la línea son

$Z_0 = 50 \text{ Ohm}$  (Impedancia característica de la línea)  
 $R_1 = 100 \text{ Ohm}$   
 $C_2 = 18 \text{ pF}$   
 $R_3 = 10 \text{ Ohm}$   
 $L_4 = 0.39 \text{ } \mu\text{Hy}$

La frecuencia ( $f$ ) de la señal es de 75 MHz.

Obtenemos primero los valores de las reactancias para los componentes que están en serie, las conductancias y susceptancias para los que están conectados en paralelo.

$G_1 = 1/R_1 = 0.01 \text{ Mho}$   
 $B_2 = \omega C_2 = 2 \pi f C_2 = 2\pi 75 \cdot 10^6 \cdot 18 \cdot 10^{-12} \text{ Mho} = 0.0085 \text{ Mho}$   
 $X_4 = \omega L_4 = 2 \pi f L_4 = 2\pi 75 \cdot 10^6 \cdot 0.39 \cdot 10^{-6} \text{ Mho} = 185 \text{ Ohm}$

Ahora, los valores normalizados son (dividiendo por  $Z_0$  o por  $Y_0$ , según corresponda)

$g_1 = 0.01/0.02 = 0.5$  (conductancia de  $R_1$ )  
 $b_2 = 0.0085/0.02 = 0.425$  (susceptancia de  $C_2$ )  
 $r_3 = 10/50 = 0.2$  (resistencia  $R_3$ )  
 $x_4 = 185/50 = 3.70$  (reactancia de  $L_4$ )

Comenzamos, con el diagrama de admitancias y resolvemos el paralelo entre  $g_1$  y  $b_2$ .

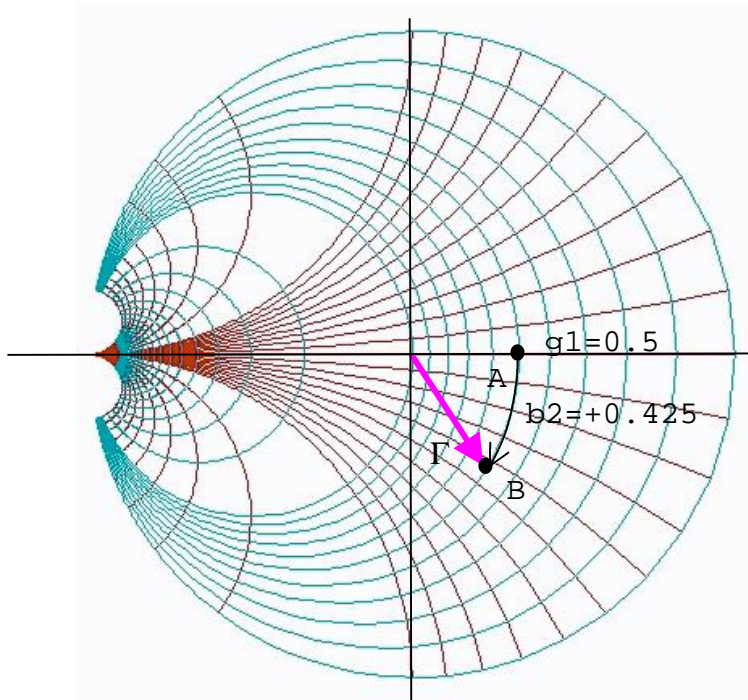
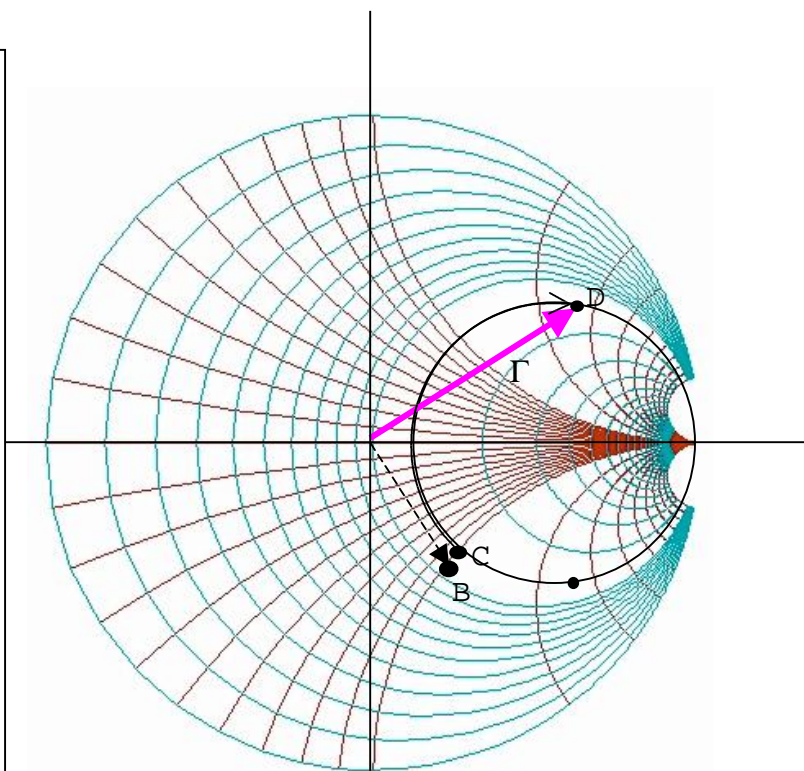


Fig.46 Marcamos el punto A, correspondiente a la primera conductancia de la derecha ( $g1=0.5$ ) y desde allí nos corremos con  $g=cte.$  aumentando (+) la susceptancia en  $b2=+0.0425$  correspondiente al capacitor, terminando en el punto B. El vector  $\Gamma$  para esos dos componentes ya se puede trazar.

Fig.47 Sobre la carta de impedancias, ahora trasladamos el punto B anteriormente hallado, y a partir de él vamos al punto C por un arco de reactancia cte. aumentando la resistencia en 0.2 por causa de  $r3$ . Desde allí nos movemos sobre un arco de  $r=cte.$  aumentando la reactancia en 3.70 a causa de  $x4$  y obtenemos el punto final D.



El último punto D define la posición del vector coeficiente de reflexión de la carga propuesta. Evidentemente resulta en una

carga muy desadaptada pues el módulo de este vector es mucho mayor que cero, haciendo que el ROE sea elevado. Una estimación del módulo de  $\Gamma$  da  $|\Gamma|=0.7$ , con lo que

$$\text{ROE} = \frac{1 + 0.7}{1 - 0.7} = 5.67$$

Es importante destacar que para evitar confusiones al resolver estos problemas gráficos hay que tener en cuenta que tanto la resistencia (en la carta de impedancias) como la conductancia (en la carta de admitancias) solo puede aumentar. En cambio, la reactancia o la susceptancia pueden tener los dos signos positivo y negativo.

Ejemplo 2:

Ahora tenemos la carga del ejercicio anterior al final de la línea, y a una distancia de ella de  $3.9\lambda$ , tenemos una resistencia en paralelo de 100 Ohm. Deseamos conocer el coeficiente de reflexión al principio de la línea que tiene un largo de  $14.5\lambda$ .

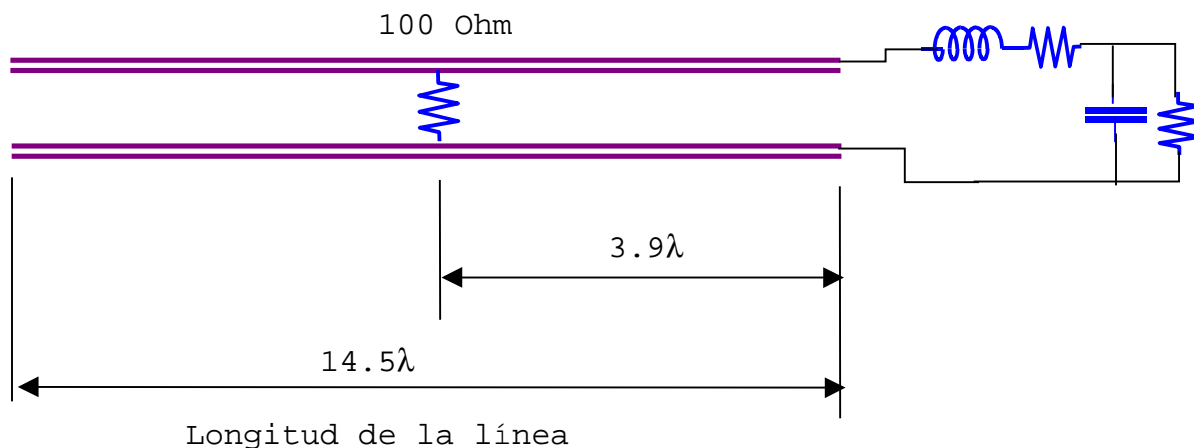


Fig. 48

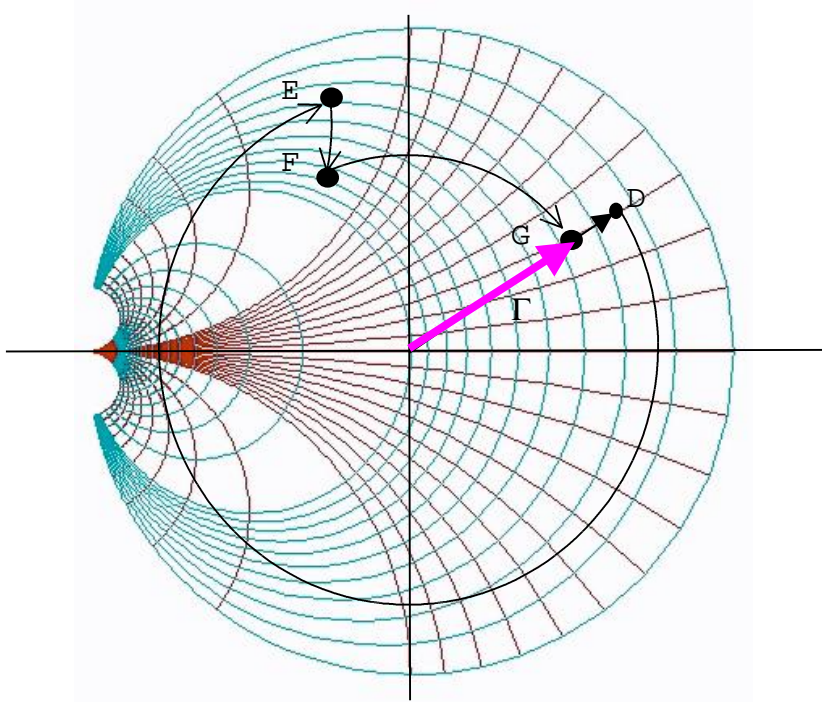
Recordemos que cuando recorremos la línea hacia el generador, la punta del vector  $\Gamma$  va girando hacia la derecha a razón de dos vueltas por cada longitud de onda entera recorrido en la línea.



Calculamos la conductancia adicional, y su relación con  $Y_0$

$$G = 1/100 \text{ Mho} = 0.01 \text{ Mho}$$

$$g = 0.01/0.02 = 0.5$$



*Fig.49 Desde la carga (D) hasta 3.9λ, el vector  $G$  rotará  $3.9 \times 2 = 7.8$  vueltas (E). En la carta de admitancias solo veremos la fracción de vuelta (0.8). Luego le sumamos la conductancia  $g=0.5$  lo que nos lleva por un arco de  $b=\text{cte.}$  hasta el punto F. Este vector aún rotará  $(14.5-3.9) \times 2 = 21.2$  veces más hacia el generador. Solo veremos la fracción (0.2 de vuelta) (punto G). El coef. de reflexión en ese punto es  $G$ .*

De casualidad el vector  $\Gamma$  resulta tener al principio de la línea, la misma orientación angular que tenía al principio.

Podemos observar que el ROE, aunque menor que antes, todavía resulta elevado, pues el módulo de  $G$  vale ahora alrededor de 0.6.

### **Adaptación de impedancias**

Anteriormente vimos que se podían adaptar dos impedancias diferentes por medio de una línea de  $1/4\lambda$ , solo calculando su valor de impedancia característica.

Sin embargo las dos impedancias a adaptar debían ser resistivas. Se pueden adaptar todo tipo de impedancias, incluso de características reactivas, insertando redes L invertidas formadas por capacitores e inductores. De este modo, la red adaptadora no consume energía.



Fig.50

La red adaptadora está compuesta por solo dos componentes: una suceptancia en paralelo (B) y una reactancia en serie (X).

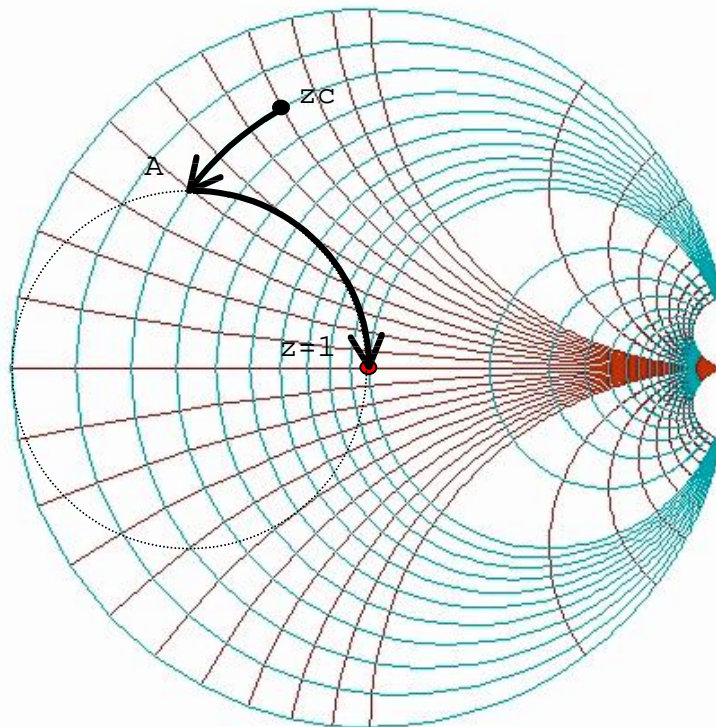
Según el valor de la impedancia de carga, la suceptancia en paralelo resultará estar del lado de la línea (como en el gráfico) o del lado de la carga.

La impedancia de carga  $Z_c$  es en general

$$Z_c = R_c + j X_c$$

una resistencia ( $R_c$ ) y una reactancia ( $X_c$ ) en serie.

Fig.51 En una carta de Smith de impedancias marcamos el punto de la impedancia de carga normalizada  $z_c$  y una circunferencia de conductancia constante (del diagrama de Smith de admitancias).



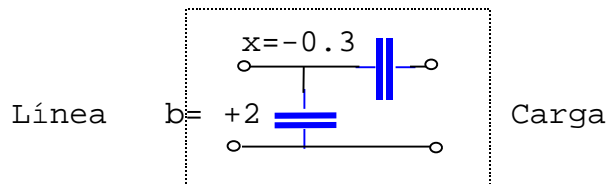
La impedancia normalizada elegida para este ejemplo es

$$z_c = 0.2 + j 0.7$$

Desde ese punto nos corremos a lo largo de una circunferencia de resistencia constante hasta el punto A. Este corrimiento corresponde a la rama serie de la red adaptadora. Como nos corrimos girando a la izquierda, lo que hicimos es agregar una reactancia capacitiva normalizada de  $-0.3$

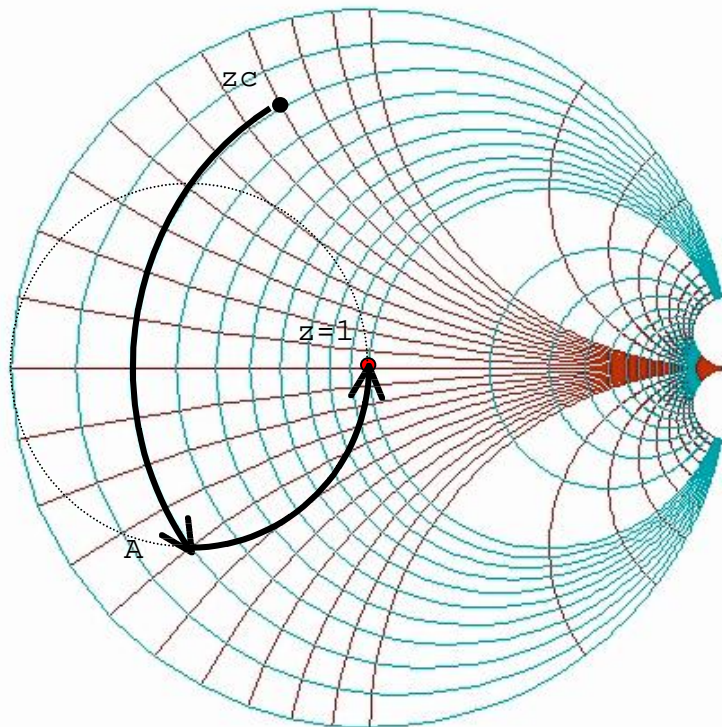
Una vez en el punto A, nos desplazamos ahora a lo largo de una circunferencia de conductancia constante (de un diagrama de admitancias) hasta llegar al centro de la carta donde  $z=1$  (es decir que llegamos al punto cuya impedancia es la característica de la línea). Como aquí nos desplazamos con giro a la derecha estamos agregando una susceptancia también capacitiva de  $+2$ .

Fig.52



Sin embargo, la solución no da una sola red adaptadora sino dos. La otra red es la que sigue

*Fig.53 Desde  $z_c$  nos corremos con resistencia cte. hasta el nuevo punto A, lo que pone en serie un capacitor de reactancia  $-1.1$  (contar las curvas de reactancia cte. cortadas a lo largo del recorrido) y luego sobre una circunferencia de conductancia cte. hasta  $z=1$ , agregando una susceptancia en paralelo de  $-2$  (que resulta ser un inductor)*



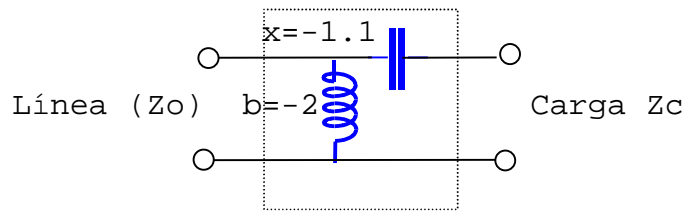


Fig. 54

Los valores de capacidad y inductancia resultantes se obtienen rápidamente si se tienen los valores de Impedancia Característica de la línea y la frecuencia de trabajo.

Supongamos tener

$$Z_o = 50 \text{ Ohm}$$

$$f = 100 \text{ MHz} \quad \text{à} \quad \omega = 2\pi f = 628 \cdot 10^6 \text{ rad/seg}$$

entonces en el caso de la Fig.58 donde

$$x = -0.3$$

$$b = +2$$

será

$$X = Z_o x = 50 (-0.3) = -15 \text{ Ohm (capacitivo)}$$

$$B = \frac{1}{Z_o} b = \frac{1}{50} (+2) = \frac{1}{25} \text{ Mho (capacitivo)}$$

luego, para la reactancia X

$$X = \frac{-1}{\omega C_1} \text{ lo que lleva a } C_1 = \frac{-1}{\omega X} = \frac{+1}{628 \cdot 10^6 \cdot 15} = 106 \text{ pF}$$

y para la suceptancia B

$$B = \omega C_2 \rightarrow C_2 = \frac{B}{\omega} = \frac{1/25}{628 \cdot 10^6} = 64 \text{ pF}$$



y para el caso de la Fig. 54 es

$$x = -1.1 \text{ (capacitivo)}$$

$$b = -2 \text{ (inductivo)}$$

La reactancia será

$$X = Z_0 x = 50 (-1.1) = -55 \text{ Ohm}$$

y la susceptancia

$$B = \frac{1}{Z_0} \quad b = \frac{1}{50} (-2) = -\frac{1}{25}$$

los valores de capacidad e inductancia son luego

$$C = \frac{-1}{\omega X} = \frac{+1}{628 \cdot 10^6 \cdot 55} = 29 \text{ pF}$$

$$B = \frac{-1}{\omega L} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{-1}{\omega B} = \frac{+1}{628 \cdot 10^6 \cdot (1/25)} = 39.8 \text{ nHy}$$

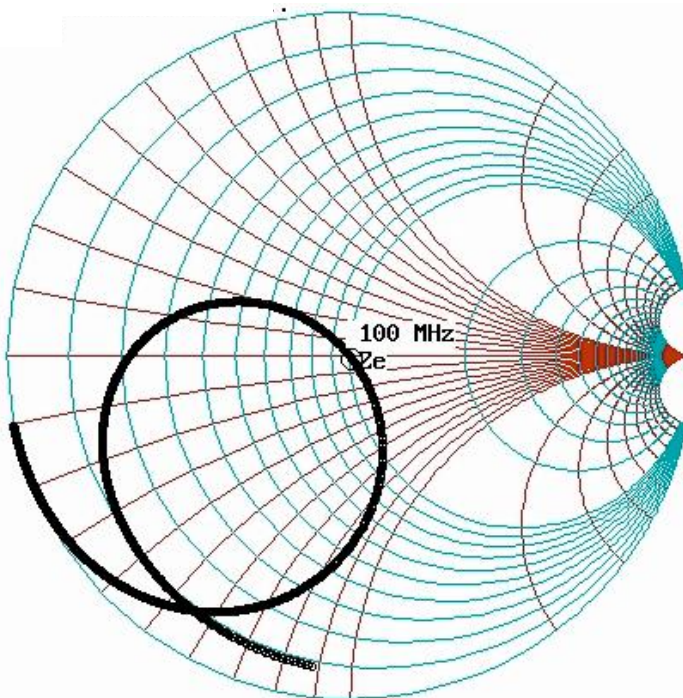
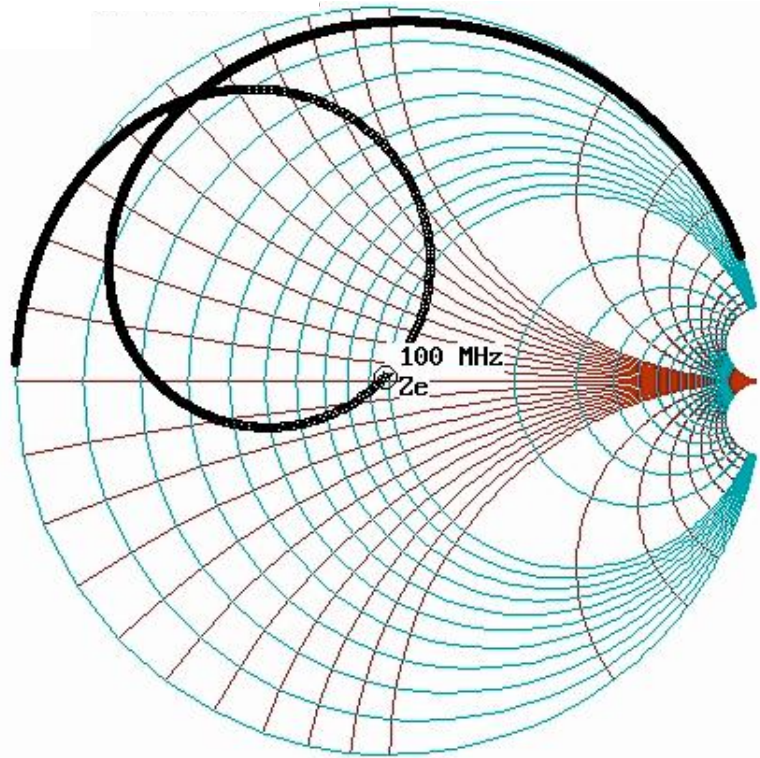


Fig.55 La carga  $Z_c$  con la red adaptadora de la Fig.52 presenta a la línea de transmisión diferentes impedancias de entrada según la frecuencia de la señal. Estas impedancias de entrada se grafican en la carta de Smith de la izquierda. Lo importante es que a la frecuencia de trabajo (100MHz), la impedancia de entrada ( $Z_e$ ) es justo la impedancia característica de la línea (centro de la carta)

Fig.56 La segunda red adaptadora aplicada a la carga presenta otro comportamiento cuando se varía la frecuencia de la señal, visto desde la línea. Sin embargo, la impedancia de entrada del conjunto red+impedancia de carga toma justo el valor de la impedancia característica de la línea ( $Z_0$ ) a la frecuencia propuesta (100MHz)



El estudio de la respuesta en frecuencia del conjunto red adaptadora+impedancia de carga demuestra que a la frecuencia de trabajo propuesta (100MHz) la adaptación es perfecta, sirviendo de verificación de los valores calculados.