

Capítulo 2

Atmósferas Estelares

2.1 Introducción

Hasta esta parte de nuestra descripción de las estrellas nos hemos reducido a hablar de la apariencia que ellas exhiben en el cielo (parámetros observacionales). Abordaremos en este capítulo y en los que restan de esta primera parte, un estudio detallado de la estructura de las estrellas, comenzando por la descripción de sus envolturas exteriores (atmósfera) para pasar luego a estudiar las condiciones y eventos que tienen lugar en su interior y que determinan la manera como evoluciona la estrella, problema que trataremos en el último de los capítulos.

En el presente sabemos que las estrellas son inmensas esferas gaseosas que se mantienen compactas por su propia autogravedad. Es imposible definir para este sistema gaseoso un límite concreto entre lo que podríamos llamar su interior y su exterior.

A pesar de esto ciertas circunstancias a una distancia definida del centro hacen que la materia se vuelva transparente al flujo de radiación proveniente del interior. Mientras en las capas interiores a esta región, la radiación se veía virtualmente atrapada por efecto de una intensa interacción con la materia, allí subitamente es liberada. Estudiando de lejos la estrella toda su luz parecerá provenir, por tanto, de una estrecha caparazón esférica a la que damos el nombre de *superficie estelar*.

Toda la materia de la estrella por encima de esta "barrera" se constituye en lo que el astrofísico conoce como la *atmósfera estelar*.

La importancia del estudio de la atmósfera estelar, radica en que ella es la fuente de casi toda la radiación electromagnética que emite la estrella, radiación que se constituye a su vez en casi la única información disponible sobre la estrella misma.

En la atmósfera estelar tienen su origen las líneas presentes en el espectro de absorción de la estrella. La importancia del estudio de las características de estas líneas, que proveen al astrofísico de información sobre las condiciones a las que está sometida la materia estelar o su composición química por ejemplo, revela de nuevo la relevancia suma que tiene para el investigador la elaboración de completos modelos físicos que le permitan describir esta región de la "anatomía" estelar.

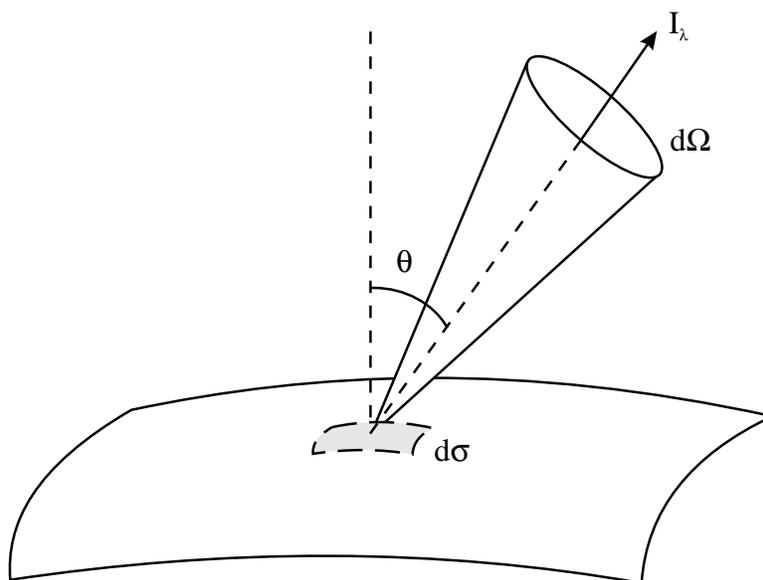


Figura 2.1: Definición de intensidad específica.

Será nuestra tarea, en el capítulo que ahora empezamos, construir una imagen posible de los fenómenos y procesos físicos que tienen lugar en la atmósfera estelar, imagen que nos dará la capacidad de reconstruir después las observaciones.

2.2 Transferencia Radiativa en la Materia

Las propiedades de la atmósfera estelar están determinadas por la manera como se propaga la radiación a través de ella.

Por tal motivo estudiaremos en algún detalle el problema general de la propagación de la radiación en la materia.

La cantidad de energía transportada por una onda electromagnética está cuantificada por su *intensidad específica*, I_λ , que se define como la cantidad de energía que atraviesa la unidad de área, en la unidad de tiempo, en un intervalo unitario de longitud de onda alrededor de λ y contenida en un cono con una amplitud de 1 *esteroradian* (ver figura 2.2). Las unidades de esta cantidad física en el sistema internacional son por definición $j m^{-2} s^{-1} m^{-1} sr^{-1}$.¹

Puede mostrarse que la energía total de la onda que atraviesa el diferencial de superficie $d\sigma$ en la figura 2.2, en el tiempo entre t y $t + dt$, en la forma de ondas electromagnéticas con longitud entre λ y $\lambda + d\lambda$, contenida en el cono de amplitud $d\Omega$, está dada por,

¹El factor m^{-1} hace referencia a la unidad de longitud de onda, por lo que a menudo las unidades de la intensidad específica se escriben también como $j m^{-2} s^{-1} \text{Å} sr^{-1}$.

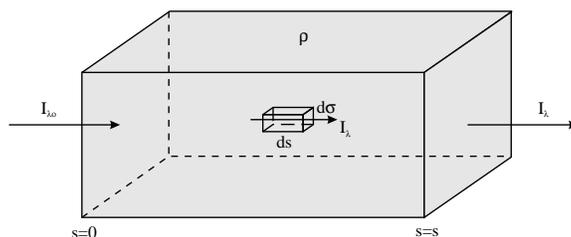


Figura 2.2: Radiación atravesando un trozo rectangular de materia.

$$dE = I_\lambda d\sigma dt d\lambda d\Omega$$

El flujo de radiación o *radianza*, que atraviesa una superficie, definido como la energía emitida por la unidad de área en la unidad de tiempo, en la unidad de longitud de onda, en dirección normal a la superficie está dado a su vez por,

$$R_\lambda = \int_{4\pi} I_\lambda \cos \theta d\Omega \quad (2.1)$$

donde $\cos \theta$ es un factor que filtra sólo la energía que fluye en dirección normal a la superficie.

Para empezar nuestra descripción de la manera como se propaga la radiación en la materia consideremos una onda plana que atraviesa un trozo rectangular de materia como lo muestra la figura 2.2 .

Cuando la onda atraviesa la materia dos son los procesos posibles por los que su contenido energético se ve alterado:

1. **Absorción :** La materia roba parte de la energía electromagnética transportada por la onda en la dirección de propagación. La absorción puede ser total cuando la energía de la onda es transformada permanentemente en otro tipo de energía, o puede implicar el proceso de "dispersión" que consiste en absorción seguida de reemisión en una dirección distinta de la original.

La cantidad de energía extraída de la onda se supone proporcional al tramo recorrido por la misma (ds), la densidad de la materia (ρ) y la cantidad total de energía transportada. El cambio en la intensidad específica por efecto de la absorción es, por tanto,

$$-\kappa_\lambda \rho I_\lambda ds \quad (2.2)$$

el parámetro de proporcionalidad κ_λ , recibe el nombre de *opacidad* y por definición sus unidades en el sistema internacional (SI) son $m^2 kg^{-1}$.

En general la opacidad de la materia depende sus propiedades absorbentes particulares, a esto se debe su dependencia con λ .

2. **Emisión** : En este caso, el medio agrega energía a la onda electromagnética.

El aporte depende de la cantidad de materia en la región considerada que a su vez es proporcional a la longitud de dicha región y a su densidad. El cambio en la intensidad específica de la onda afectada por la emisión será por tanto,

$$\epsilon_{\lambda} \rho ds \quad (2.3)$$

el parámetro de proporcionalidad ϵ_{λ} , recibe el nombre de coeficiente de emisión y por su definición tiene unidades de $j s^{-1} \text{ \AA}^{-1} sr^{-1} kg^{-1}$.

Se considera también en general una dependencia de ϵ con la longitud de onda.

En síntesis, teniendo en cuenta los dos tipos de procesos descritos, podemos finalmente escribir el cambio total en la intensidad específica de la onda que viaja por el diferencial de volumen $d\sigma ds$, como,

$$dI_{\lambda} = -\kappa_{\lambda} \rho I_{\lambda} ds + \epsilon_{\lambda} \rho ds$$

Condición que se puede expresar de manera más adecuada por la ecuación,

$$\frac{dI_{\lambda}}{d\tau_{\lambda}} = -I_{\lambda} + S_{\lambda} \quad (2.4)$$

que recibe el nombre de *ecuación de transferencia radiativa*² y que será nuestra principal herramienta teórica en la descripción de la atmósfera estelar.

En 2.4 hemos introducido dos nuevas cantidades : S_{λ} y τ_{λ} .

$S_{\lambda} = \epsilon_{\lambda}/\kappa_{\lambda}$ recibe el nombre de *función de fuente* (*source function*) y por su definición cuantifica la capacidad emisiva de la materia involucrada.

τ_{λ} se conoce con el nombre de *profundidad óptica* y satisface,

$$\begin{aligned} d\tau_{\lambda} &= \kappa_{\lambda} \rho ds \\ \tau_{\lambda} &= \int_0^s \kappa_{\lambda} \rho ds \end{aligned} \quad (2.5)$$

τ_{λ} es una cantidad adimensional que, puede demostrarse, está asociada al número de interacciones que sufre un fotón antes de abandonar la superficie de un medio. Así un fotón que se desplace en un medio muy opaco (su camino libre medio es pequeño) se verá absorbido y reemitido un número mayor de veces (gran profundidad óptica) que uno que lo haga en un medio poco opaco. Nótese que dos medios de distinta opacidad, tienen, para una misma profundidad lineal, distintas profundidades ópticas, siendo mayor en el

²Esta es apenas una forma simplificada de una más general *Ecuación de transferencia Radiativa*

caso del medio más opaco. Por esto no debe confundirse nunca esta cantidad, a pesar de que su nombre se presta para tales confusiones, con una profundidad real en el medio. Ocupémonos ahora de tres situaciones sencillas que nos mostrarán los métodos generales utilizados para abordar el problema de la transferencia radiativa ante todo en lo concerniente a la elección de la desconocida función S_λ .

1. Medio no emisor

Supongamos por ejemplo que el medio considerado carece completamente de propiedades emisivas³ (la atmósfera terrestre por ejemplo). Esto se expresa por la condición $S_\lambda = 0$. Introduciendo esta condición en la ecuación de transferencia radiativa y resolviendo por separación de variables encontramos,

$$I_\lambda = I_{\lambda_0} \exp(-\tau_\lambda)$$

es decir la intensidad específica para el caso considerado cae exponencialmente con la profundidad óptica. Un medio altamente opaco provocará una disminución considerable de la intensidad específica de una onda lumínica, aunque esta haya recorrido una distancia lineal muy pequeña.

Nótese en esta situación que la energía que pierde la onda es absorbida completamente por el medio, causando un incremento en la temperatura del mismo. Nos enfrentamos así a una situación de desequilibrio entre la energía contenida en el medio y la transportada por la onda electromagnética que la atraviesa.

2. Medio en equilibrio termodinámico total

Otro caso de interés es aquel en el que el medio devuelve completamente a la onda la energía que le roba. A esta situación se la llama *Equilibrio termodinámico total* y por su definición estará caracterizada por la condición :

$$\frac{dI_\lambda}{d\tau_\lambda} = 0 \tag{2.6}$$

Por 2.4 esto implica que $S_\lambda = I_\lambda$. Dado que la condición de equilibrio termodinámico total es precisamente la que caracteriza a lo que se conoce como un cuerpo negro, la intensidad específica de la radiación en el interior del mismo puede escribirse, por los resultados del apéndice , así,

$$I_\lambda = B_\lambda(T_o) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\exp(hc/\lambda kT_o) - 1}$$

³Esto es evidentemente falso dado que en cualquier medio existirá siempre algo de radiación producida por la agitación térmica de las partículas que la componen. Más bien supongamos, que en cierto rango de frecuencias dicha emisión se puede considerar despreciable

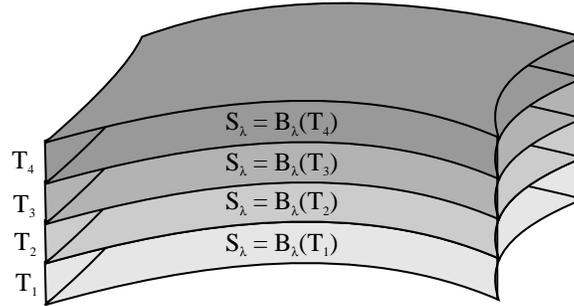


Figura 2.3: La estructura en capas de una atmósfera para la que se supone válida la condición de equilibrio termodinámico local.

Donde T_o es la temperatura del cuerpo (la misma en todas partes).

La condición de equilibrio térmico total implica entonces que,

$$S_\lambda = B_\lambda(T_o) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\exp(hc/\lambda kT_o) - 1}$$

3. Equilibrio termodinámico local

¿Cuál es la forma de la función S para el caso de un cuerpo en el que existe un gradiente de temperaturas que no varía con el tiempo, esto es, un cuerpo en el que los procesos de emisión y absorción están localmente, más no totalmente, equilibrados?

Es esta la situación que más se aproxima la realidad de la atmósfera estelar, la que por obvias razones, no se encuentra en equilibrio termodinámico total.

Si suponemos que el cuerpo tiene una opacidad pequeña (es esta la situación en la atmósfera estelar), el camino libre medio de los fotones (que nos da la escala en la que varía la temperatura de la materia) será mucho mayor al correspondiente a las partículas. Por esta razón es de esperarse que localmente se produzca una condición de equilibrio en la que la temperatura a escalas del orden del camino libre medio de las partículas no varíe apreciablemente. Así la condición de equilibrio termodinámico total $S_\lambda = B_\lambda(T)$ se podría considerar válida localmente, y al cuerpo se lo podría pensar constituido de la superposición de capas en equilibrio termodinámico pero a diferentes temperaturas (Ver figura 3).

A esta situación, se la conoce como *Equilibrio Termodinámico Local* (LTE).

En la aproximación LTE la función de fuente tiene la forma explícita,

$$S_\lambda = B_\lambda[T(\tau_\lambda)]$$

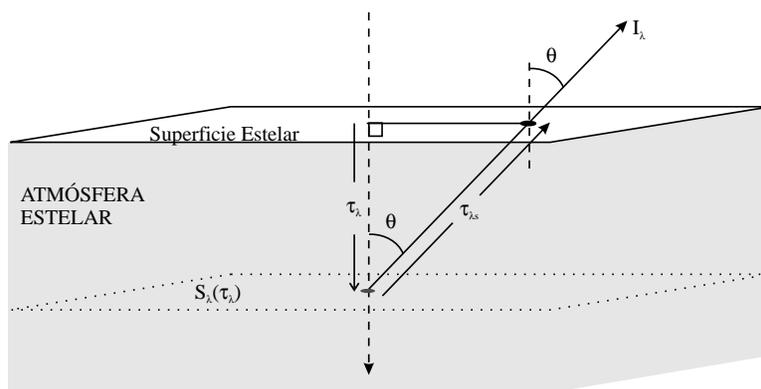


Figura 2.4: Atmósfera plano-paralela.

Este resultado será de vital importancia en el estudio de la estructura de la atmósfera estelar en la siguiente sección .

2.3 Transferencia Radiativa en la Atmósfera Estelar

Estudiaremos en esta sección el problema concreto de la propagación de la radiación en el seno de la atmósfera estelar. Dada la dificultad del problema preciso, nos veremos obligados a realizar una serie de aproximaciones que nos permitirán en primera instancia escribir de manera más adecuada la ecuación general de transferencia radiativa y más tarde encontrar para ella una solución que aunque no es la exacta, nos brindará algo de luz en el conocimiento de la naturaleza de las atmósferas estelares.

Para empezar, reconozcamos el hecho de que el grosor de lo que llamamos la atmósfera estelar es despreciable comparado con el tamaño total de la estrella. Esto nos permite suponer que a escalas del orden de dicho grosor es posible considerar a la atmósfera una región plana de superficies paralelas (aproximación de *atmósfera plano-paralela*). Esta primera suposición concerniente a la geometría de la atmósfera estelar, nos permite escribir la ecuación general de transferencia radiativa en la forma,

$$\frac{dI_\lambda(\tau_{\lambda_s}, \theta)}{d\tau_{\lambda_s}} = -I_\lambda(\tau_{\lambda_s}, \theta) + S_\lambda(\tau_{\lambda_s}, \theta)$$

donde τ_{λ_s} es la profundidad óptica medida en la dirección de θ (ver figura 2.4).

Dada la geometría del problema la profundidad óptica τ_{λ_s} es una variable independiente menos adecuada que la profundidad óptica τ_λ medida en dirección transversal a la superficie de la atmósfera. Un razonamiento sencillo muestra que,

$$\tau_{\lambda_s} = -\tau_\lambda \sec \theta$$

donde el signo implica que τ_λ , al contrario de $\tau_{\lambda s}$, crece al penetrar en la atmósfera, adoptando el valor de 0 en la superficie.

Con el cambio de variable la ecuación de transferencia radiativa para el caso de una atmósfera plano paralela queda :

$$\cos \theta \frac{dI_\lambda(\tau_\lambda, \theta)}{d\tau_\lambda} = I_\lambda(\tau_\lambda, \theta) - S_\lambda(\tau_\lambda) \quad (2.7)$$

La solución a esta ecuación proveerá del valor de la intensidad específica de la radiación que atraviesa la atmósfera en cualquier punto interior de la misma, información que será fundamental, por ejemplo, en la determinación de las características de las líneas espectrales. Por otro lado nos dará la posibilidad de conocer la manera como es emitida la radiación desde la "superficie" de la estrella permitiéndonos dar explicación por ejemplo al fenómeno del oscurecimiento del limbo estelar, del que hablaremos más adelante.

La integración de 2.7 se logra utilizando el factor integrante,

$$F.I. = \exp(-\tau_\lambda \sec \theta)$$

Multiplicando 2.7 por este factor se obtiene,

$$\frac{dI_\lambda(\tau_\lambda, \theta)}{d(\tau_\lambda \sec \theta)} \exp(-\tau_\lambda \sec \theta) - I_\lambda(\tau_\lambda, \theta) \exp(-\tau_\lambda \sec \theta) = -S_\lambda(\tau_\lambda) \exp(-\tau_\lambda \sec \theta)$$

separando variables,

$$d(I_\lambda(\tau_\lambda, \theta)) \exp(-\tau_\lambda \sec \theta) - I_\lambda(\tau_\lambda, \theta) \exp(-\tau_\lambda \sec \theta) d(\tau_\lambda \sec \theta) = -S_\lambda(\tau_\lambda) \exp(-\tau_\lambda \sec \theta) d(\tau_\lambda \sec \theta)$$

$$d(I_\lambda(\tau_\lambda, \theta) \exp(-\tau_\lambda \sec \theta)) = -S_\lambda(\tau_\lambda) \exp(-\tau_\lambda \sec \theta) d(\tau_\lambda \sec \theta)$$

Si integramos con límites en $\tau_\lambda = \tau_{\lambda 0}$ (un punto cualquiera en el interior de la atmósfera) y $\tau_\lambda = \infty$ ⁴, obtenemos el resultado,

$$I_\lambda(\tau_{\lambda 0}, \theta) = \int_{\tau_{\lambda 0}}^{\infty} S_\lambda(\tau_\lambda) \exp(-[\tau_\lambda - \tau_{\lambda 0}] \sec \theta) d(\tau_\lambda \sec \theta) \quad (2.8)$$

Es de nuestro interés particular conocer la forma de I_λ en la superficie, i.e. determinar $I_\lambda(\tau_{\lambda 0} = 0, \theta)$. Dicha intensidad, en virtud de 2.8, está dada por,

$$I_\lambda(0, \theta) = \int_0^{\infty} S_\lambda(\tau_\lambda) \exp(-\tau_\lambda \sec \theta) d(\tau_\lambda \sec \theta) \quad (2.9)$$

La anterior ecuación expresa una fundamental relación entre una cantidad que admite una medida precisa (la intensidad específica de la radiación proveniente de la estrella) y la función de fuente, esta última, de absoluta relevancia en la determinación de la estructura

⁴la opacidad de la materia en la atmósfera estelar crece al penetrar en la misma y se hace, teóricamente, indefinidamente grande cerca a su base; por esta razón una profundidad óptica que tiende a ∞ no implica una inmensa profundidad lineal, sino que marca la base de la atmósfera estelar.

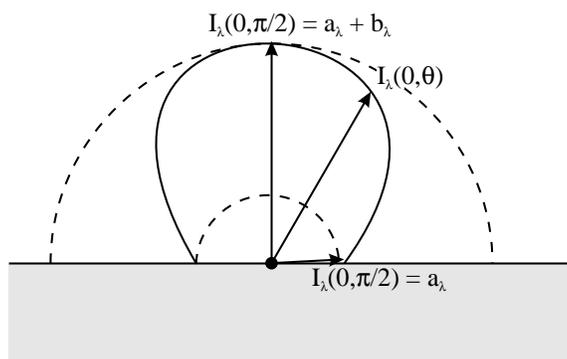


Figura 2.5: Distribución de la energía en un haz de radiación que emerge por la superficie de la estrella.

detallada de la atmósfera estelar. Así pues un proceso observacional (la medida de $I_\lambda(0, \theta)$) nos dará finalmente información sobre la inobservable estructura de la atmósfera estelar. En esto radica el valor de 2.9.

Lamentablemente la relación entre $I_\lambda(0, \theta)$ y S_λ no es tan directa como se nota en 2.9. Para facilitar el establecimiento de una conexión explícita entre ambas cantidades el astrofísico introduce una serie de suposiciones teóricas y simplificaciones que le permiten por ejemplo reducir la integral en la relación citada. Una de ellas admite por ejemplo la posibilidad de una dependencia explícita de S_λ con τ_λ de la forma⁵,

$$S_\lambda = a_\lambda + b_\lambda \tau_\lambda$$

Si introducimos dicha dependencia en 2.9, un proceso simple de integración, tiene como resultado,

$$I_\lambda(0, \theta) = a_\lambda + b_\lambda \cos \theta \quad (2.10)$$

La dependencia funcional de $I_\lambda(0)$ con el ángulo desde el que se observa un haz saliente desde la superficie de la estrella (ver figura 2.5), contiene las cantidades a_λ y b_λ que determinarán en última instancia cual es el valor de S_λ a cualquier profundidad óptica en el seno de la atmósfera estelar. Si asumimos la condición de LTE (Local Thermodynamic Equilibrium), suponemos entonces que $S_\lambda = B_\lambda(T)$, de modo que el conocimiento de una dependencia de S con la profundidad óptica, nos provea de la dependencia de T con dicha cantidad !.

En conclusión la medida de $I_\lambda(0, \theta)$, en la aproximación de una atmósfera plano paralela y con LTE, nos da el perfil de temperaturas en el seno de la misma. En esto radica la importancia de nuestro anterior análisis.

⁵En una sección posterior se demostrara la validez, no sólo la funcionalidad, de una suposición como esta

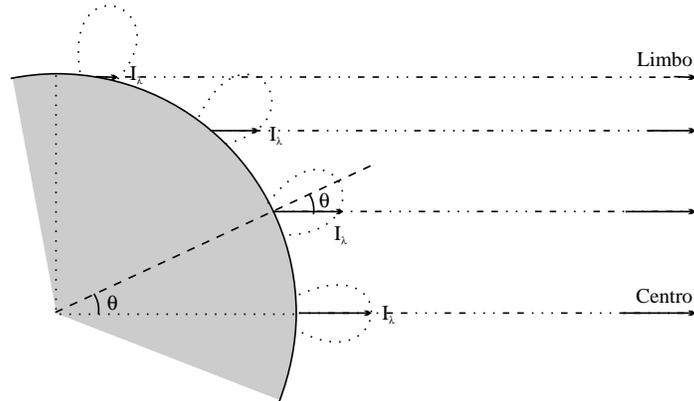


Figura 2.6: Fenómeno del oscurecimiento del limbo estelar.

Pero, ¿ cómo medir $I_\lambda(0, \theta)$?.

Considérese la situación de la figura 2.6, en la que se ha representado una estrella cuya superficie es resoluble, esto es una estrella que no vemos como un punto. Cuando dirigimos nuestra mirada al centro de la estrella, la radiación que viene de allí tendrá una intensidad específica, en virtud de 2.10, igual a,

$$I_\lambda(0, \text{centro}) = a_\lambda + b_\lambda$$

al mirar hacia el borde o limbo del disco aparente de la estrella, la intensidad específica de la radiación tenderá al valor,

$$I_\lambda(0, \text{limbo}) \rightarrow a_\lambda$$

en una situación intermedia se verifica que,

$$I_\lambda(0, \text{limbo}) < I_\lambda(0, \text{intermedio}) < I_\lambda(0, \text{centro})$$

esto es, el disco de la estrella aparecerá superficialmente menos brillante al acercarnos a su limbo.

Este fenómeno recibe el nombre de *oscurecimiento del limbo estelar* y su observación es el único camino en la determinación de $I_\lambda(0, \theta)$.

Debe anotarse que el oscurecimiento del limbo estelar, que corresponde a un fenómeno claramente observado por ejemplo en el caso de nuestro Sol (Ver figura 2.7), no es una conclusión exclusiva de la forma de I dada por 2.10, para la obtención de la cual se hizo una suposición sobre la forma explícita de la desconocida función S . Cualquiera forma que adopte S , deberá siempre producir una $I_\lambda(0)$ para la cual $I_\lambda(\text{centro}) > I_\lambda(\text{limbo})$. Puede demostrarse que esto se satisface si S es una función creciente de la profuncidad óptica, que en la aproximación LTE equivale a suponer que la temperatura crece hacia adentro

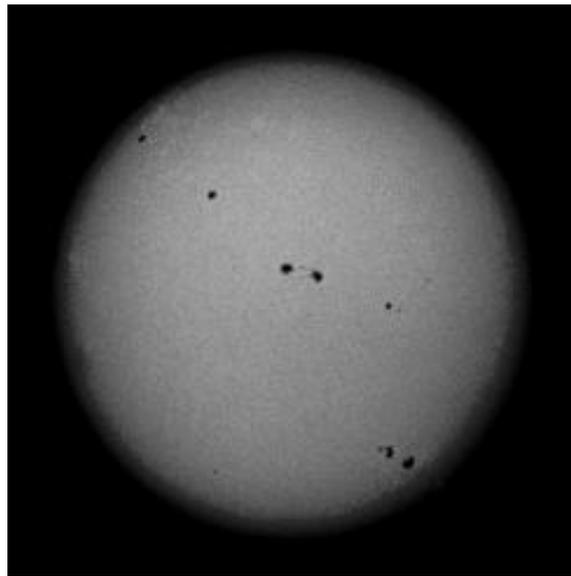


Figura 2.7: Fotografía del Sol en el visible.

de la atmósfera, hecho que es claramente obvio en la situación de una atmósfera normal⁶.

Medidas precisas del oscurecimiento del limbo solar han sido hechas en varias longitudes de onda. En todos los casos se verifica la validez de la relación 2.10, lo que demuestra que el modelo lineal supuesto para S_λ representa una buena aproximación a la dependencia real de esta cantidad con la profundidad óptica. En un apartado posterior, la validez del modelo quedará demostrada a partir de argumentos físicos.

Cuando no es posible resolver la superficie de la estrella, toda información sobre la direccionalidad de la intensidad específica se pierde, y lo que reciben nuestros instrumentos resulta de una superposición de la energía proveniente desde distintos puntos de la superficie estelar.

En este caso no importa por tanto conocer la energía que es emitida en una determinada dirección desde un punto de la superficie estelar. Es de nuestro interés ahora conocer la cantidad total de energía que fluye hacia afuera desde la superficie de la estrella y que resulta de la suma del aporte energético de las ondas que salen en todas direcciones. Esta energía está cuantificada por el denominado flujo radiativo, que se definió en la sección

⁶en algunas estrellas en las que la atmósfera se extiende para formar la denominada cromosfera, aunque la condición de un T decreciente hacia afuera se satisface en su parte más interior, en esta última envoltura el gradiente de temperatura se invierte y la condición mencionada deja de cumplirse. Sin embargo la cantidad de radiación en el rango visible procedente de dicha envoltura es tan pequeña a comparada con la que llega de las envolturas interiores más regulares, que el fenómeno del oscurecimiento del limbo se sigue manifestando.

2.2 y que vimos estaba dado por,

$$F_\lambda(\tau_\lambda) = \int_{4\pi} I_\lambda(\tau_\lambda, \theta) \cos \theta \, d\Omega$$

Introduciendo en la anterior expresión la forma explícita de $I_\lambda(0, \theta)$ dada por 2.10, se obtiene,

$$F_\lambda(0) = \int_{4\pi} (a_\lambda + b_\lambda \cos \theta) \cos \theta \, d\Omega$$

con $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ e integrando en el rango $\phi \in [0, 2\pi]$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ⁷, se obtiene,

$$F_\lambda(0) = \pi(a_\lambda + \frac{2}{3}b_\lambda)$$

$$F_\lambda(0) = \pi S_\lambda(\tau_\lambda = \frac{2}{3}) \tag{2.11}$$

Esta última igualdad recibe el nombre de *Relación de Eddington - Barbier*.

Una importante consecuencia se sigue de esta relación. La cantidad de energía en todas las longitudes de onda que sale desde la superficie de la estrella por unidad de área por unidad de tiempo, resulta ser,

$$\frac{L}{4\pi R^2} = \int_0^\infty F_\lambda(0) d\lambda = \pi \int_0^\infty S_\lambda(\tau_\lambda = 2/3) d\lambda \tag{2.12}$$

En la aproximación LTE, $S_\lambda = B_\lambda$. Pero la radianza de un cuerpo negro está dada por $R_\lambda = \int_{4\pi} B_\lambda \cos \theta \, d\Omega$ y dado que B_λ es independiente de la dirección (la radiación es isotrópica), entonces $R_\lambda = \pi B_\lambda$.

Por otro lado la ley de Stefan establece que,

$$\int_0^\infty R_\lambda(T) d\lambda = \sigma T^4$$

Si en 2.12 eliminamos la dependencia de τ con la longitud de onda (esta suposición recibe el nombre de *aproximación de atmósfera gris*) e integramos obtenemos :

$$\frac{L}{4\pi R^2} = \sigma [T(\tau = 2/3)]^4$$

Pero en el capítulo 1 se definió así la temperatura efectiva de la estrella,

$$\frac{L}{4\pi R^2} = \sigma T_{eff}^4$$

de donde se concluye finalmente que,

⁷se ha supuesto que la radiación entrante, $\theta > \frac{\pi}{2}$, lleva energía despreciable comparada con la que transporta la radiación saliente. Esto es válido cuando suponemos que el espacio exterior a la atmósfera de la estrella está completamente exento de fuentes de radiación comparablemente intensas a la atmósfera misma.

$$T_{eff} = T(\tau = 2/3)$$

es decir, en la aproximación lineal para S , considerando LTE y una atmósfera gris, la temperatura efectiva de una estrella es igual a la temperatura de una capa de su atmósfera situada a una profundidad óptica media de $2/3$. Se demuestra de esta manera la idea expresada en el capítulo anterior, de que la temperatura efectiva no corresponde a la temperatura superficial de la estrella.

Los más relevantes resultados obtenidos hasta este punto partieron de la suposición de una dependencia lineal de S con la profundidad óptica. Como vimos la experiencia con el fenómeno del oscurecimiento del limbo estelar demuestra que esta suposición es en general válida, pero, ¿ podemos dar una explicación física a este hecho ? . Un estudio simplificado del equilibrio mecánico y térmico de la atmósfera estelar nos permite explicar en base a consideraciones físicas tan particular dependencia de la especial función S .

Para ello consideremos como punto de partida la ecuación de transferencia radiativa escrita para una atmósfera gris plano-paralela (ecuación 2.7),

$$\cos \theta \frac{dI_\lambda(\tau, \theta)}{d\tau} = I_\lambda(\tau, \theta) - S_\lambda(\tau) \quad (2.13)$$

integrando sobre todas las longitudes de onda obtenemos,

$$\cos \theta \frac{dI(\tau, \theta)}{d\tau} = I(\tau, \theta) - S(\tau)$$

donde $I = \int_0^\infty I_\lambda$ y $S = \int_0^\infty S_\lambda$. Si integramos sobre todas las direcciones encontramos,

$$\frac{d}{d\tau} \int_{4\pi} I(\tau, \theta) \cos \theta d\Omega = \int_{4\pi} I(\tau, \theta) d\Omega - S(\tau) \int_{4\pi} d\Omega$$

aquí $\int_{4\pi} I(\tau, \theta) \cos \theta d\Omega = F(\tau)$ (flujo radiativo bolométrico⁸). Llamando $\bar{I}(\tau) = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} I(\tau, \theta) d\Omega$, la ecuación anterior se convierte en,

$$\frac{1}{\pi} \frac{dF(\tau)}{d\tau} = \bar{I}(\tau) - S(\tau) \quad (2.14)$$

En una atmósfera plano paralela en equilibrio térmico, la radiación que entra en una región de la atmósfera es la misma que sale de ella, y por tanto el flujo radiativo debe ser constante a todas las profundidades de la atmósfera, i.e. $\frac{dF}{d\tau} = 0$. Si el flujo radiativo sufriera alguna variación, la región donde se produjera el cambio ganaría o perdería una cantidad de energía equivalente a dicho cambio en el flujo, lo que violaría la suposición de equilibrio térmico. La exigencia de equilibrio radiativo en una atmósfera gris plano paralela, en la ecuación 2.14 implica por tanto,

$$\bar{I}(\tau) = S(\tau) \quad (2.15)$$

⁸El calificativo de bolométrico, recordemos, expresa el hecho de que se considera la contribución de todas las longitudes de onda.

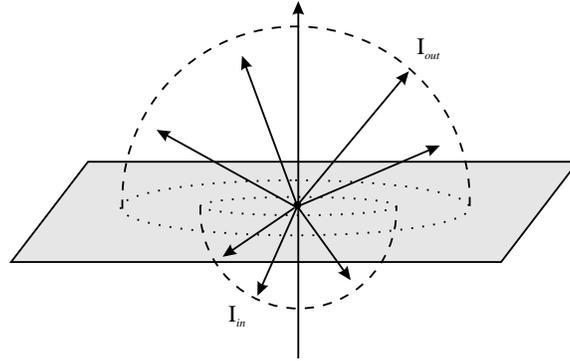


Figura 2.8: Dependencia de la intensidad específica con la dirección en el seno de una atmósfera estelar en la denominada *Aproximación de Eddington* .

Es decir a cualquier profundidad óptica en dicha atmósfera la función de fuente bolométrica es igual a la intensidad específica bolométrica promediada sobre todas las direcciones del espacio.

Demostremos ahora que \bar{I} en estas condiciones presenta una dependencia lineal con la profundidad óptica.

Multiplicando por $\cos \theta$ la ecuación de transferencia radiativa para una atmósfera gris (ec. 2.13), e integrando sobre todas las longitudes de onda y todas las direcciones, obtenemos,

$$\frac{d}{d\tau} \int_{4\pi} I(\tau, \theta) \cos^2 \theta d\Omega = F$$

de donde,

$$\int_{4\pi} I(\tau, \theta) \cos^2 \theta d\Omega = F\tau + H \quad (2.16)$$

donde H es una constante de integración.

Para realizar la integración del lado izquierdo en la última ecuación, debemos simplificar la dependencia con la dirección de la intensidad específica. En la denominada *aproximación de Eddington* esta cantidad tiene la forma,

$$I = \begin{cases} I_{out}(\tau) & \text{si } 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ I_{in}(\tau) & \text{si } \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \end{cases}$$

Vease la figura 2.8.

así ,

$$\int_{4\pi} I(\tau, \theta) \cos^2 \theta d\Omega = \frac{2\pi}{3} [I_{out}(\tau) + I_{in}(\tau)]$$

pero,

$$\bar{I}(\tau) = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} I(\tau, \theta) d\Omega = \frac{1}{2} [I_{out}(\tau) + I_{in}(\tau)]$$

y

$$F = \int_{4\pi} I(\tau, \theta) \cos \theta d\Omega = \pi [I_{out}(\tau) - I_{in}(\tau)]$$

de donde se concluye por 2.16 que,

$$\frac{4\pi}{3} \bar{I}(\tau) = F\tau + H$$

con la condición de frontera $\tau = 0$, $\bar{I} = I_{out}(0)/2$ y $F = \pi I_{out}(0)$, se concluye que $H = 2F/3$, de donde finalmente,

$$\bar{I}(\tau) = \frac{3F}{4\pi} \left(\tau + \frac{2}{3} \right)$$

por la condición de equilibrio termico (equilibrio radiativo) encontramos que $S(\tau) = \bar{I}(\tau)$ y además $F = \sigma T_{eff}^4$ de donde finalmente se obtiene,

$$S(\tau) = \frac{3\sigma T_{eff}^4}{4\pi} \left(\tau + \frac{2}{3} \right)$$

que corresponde precisamente a la relación que estábamos buscando. En ella se verifica además la identidad de Eddington-Barbier, $S(\tau = 2/3) = \sigma T_{eff}^4$.

En conclusión, cuando realizamos una serie de simplificaciones acerca del comportamiento de la atmósfera estelar (LTE, geometría plana, independencia de la opacidad con la longitud de onda) podemos elaborar un modelo completo de su estructura y los resultados obtenidos se corresponden muy bien con nuestras observaciones de esta región de la estrella. El modelo aquí construido nos será de gran utilidad en el estudio de la formación en la atmósfera estelar de las líneas espectrales, que será el problema del que nos ocuparemos a continuación.

2.4 Líneas espectrales estelares

En secciones precedentes hemos mencionado el hecho de que las estrellas presentan un característico espectro de absorción. El estudio del espectro de las estrellas representa una de las principales herramientas en la comprensión de su estructura, origen y evolución. Nos proponemos en esta parte, hacer un análisis comprensivo de la naturaleza, estructura y formación de las líneas espectrales estelares que nos permitirá más tarde comprender la relevancia y poder que tiene el análisis de las mismas en la deducción de valiosa información acerca de las estrellas.

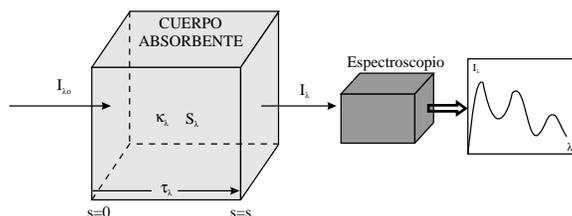


Figura 2.9: Sobre un cuerpo incide radiación de intensidad específica I_{λ_0} . ¿ Cuáles son las características espectrales de la radiación que emerge de él ?

2.4.1 Formación de las líneas espectrales estelares

Cuando se piensa en la naturaleza de los espectros estelares, una pregunta que surge de inmediato es, ¿ por qué tienen las estrellas espectros de absorción ?.

Para dar respuesta a esta pregunta, estudiemos de manera simplificada y general la manera como se producen las características espectrales de la radiación que emerge de un cuerpo. Considérese la sencilla situación de un trozo de materia en el que en general está entrando por un lado radiación con intensidad específica I_{λ_0} y del que sale radiación cuyo espectro queremos analizar (ver figura 2.9).

La ecuación de transferencia radiativa para este sencillo caso se escribe como,

$$\frac{dI_{\lambda}}{d\tau_{\lambda}} = S_{\lambda} - I_{\lambda}$$

Si asumimos que S no varía apreciablemente con la profundidad óptica, e integrando por separación de variables, obtenemos :

$$I_{\lambda} = I_{\lambda_0} \exp(-\tau_{\lambda}) + S_{\lambda}(1 - \exp(-\tau_{\lambda})) \quad (2.17)$$

Un análisis sencillo de la anterior expresión muestra que el primer término del lado derecho incluye los efectos de la absorción, que tienen como resultado la atenuación (exponencial) de la onda. Por otro lado el segundo término da cuenta de la contribución del medio a la energía de la onda por emisión de radiación, contribución que tiene una naturaleza acumulativa (factor $1 - \exp(-\tau_{\lambda})$).

Consideremos ahora dos situaciones distintas :

1. $I_{\lambda_0} = 0$, i.e. no existe radiación incidente
a su vez en esta situación podemos enfrentarnos con dos casos posibles :
 - a. $\tau_{\lambda} \ll 1$ (Cuerpo poco opaco)
en este caso podemos hacer la aproximación,

$$\exp(-\tau_{\lambda}) \approx 1 - \tau_{\lambda}$$

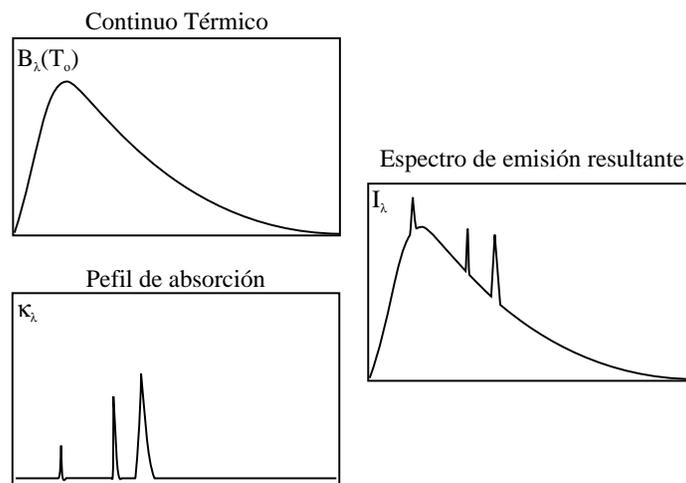


Figura 2.10: Espectro de la radiación que emerge de un cuerpo a una temperatura T_o y sobre el que no incide radiación.

con lo cual 2.17 queda,

$$I_\lambda = S_\lambda \tau_\lambda$$

Asumiendo κ_λ independiente de la profundidad lineal, la profundidad óptica se puede escribir $\tau_\lambda = \kappa_\lambda \rho s$. Asumiendo además para el cuerpo una situación de equilibrio termodinámico, i.e. $S_\lambda = B_\lambda(T_o)$, la relación anterior queda,

$$I_\lambda = (\rho s) \kappa_\lambda B_\lambda(T_o)$$

En conclusión y como se ve en la anterior expresión, la radiación saliente del cuerpo tiene un perfil espectral (dependencia de I con λ) que representa la superposición del perfil de un cuerpo negro con la temperatura de la materia que atraviesa la radiación (aproximadamente la misma en todas partes) y del perfil de su opacidad (Ver figura 2.10). Corresponde este caso a la producción de un espectro de emisión.

Nótese que la situación considerada, para la que se demostro aparece un espectro de emisión, coincide con la supuesta en la respectiva ley espectral que establece que "gases (materia poco opaca) en emisión, a una temperatura dada T_o sobre los que no incide radiación exterior, presentan un espectro como el descrito.

b. $\tau_\lambda \gg 1$ (Materia muy opaca)

en este caso $\exp(-\tau_\lambda) \approx 0$. Asumiendo equilibrio termodinámico total, 2.17 queda,

$$I_\lambda = S_\lambda = B_\lambda(T_o)$$

Es decir la radiación emergente tiene el espectro de un cuerpo negro a la temperatura del cuerpo en cuestión, es decir el espectro de la luz emitida es un espectro continuo. De nuevo el resultado empírico de la espectroscopía se reproduce en este caso.

2. $I_{\lambda_o} \neq 0$, i.e. el cuerpo está bañado por radiación exterior

De nuevo dos son los posibles casos en esta situación :

- a.** $\tau_\lambda \gg 1$

La situación es idéntica a 1b.

El espectro producido es un espectro continuo. El principal aporte al continuo lo hace el medio y la contribución que hace la radiación exterior desaparece por la fuerte absorción.

Esta situación resulta de nuestro completo interés dado que puede ser asimilada a la situación que enfrentamos cuando estudiamos la naturaleza de la luz emitida por las capas más interiores de la atmósfera de la estrella : según podemos verificar por el análisis de 1b. la radiación emitida por estas capas donde la opacidad es en extremo alta, , aporta el continuo observado en el espectro de la estrella.

- b.** $\tau_\lambda \ll 1$

En este caso 2.17 adopta la forma,

$$I_\lambda = I_{\lambda_o} + \tau_\lambda(S_\lambda - I_{\lambda_o})$$

Si se da que $S_\lambda > I_{\lambda_o}$ entonces la radiación emitida tiene la forma,

$$I_\lambda = I_{\lambda_o} + \tau_\lambda | S_\lambda - I_{\lambda_o} |$$

Suponiendo a κ_λ independiente de la profundidad óptica el resultado anterior se convierte en,

$$I_\lambda = I_{\lambda_o} + \kappa_\lambda s \rho | S_\lambda - I_{\lambda_o} |$$

que corresponde a un espectro de emisión. Esto es, si sobre un cuerpo poco opaco incide radiación que transporta energía inferior a la que emite el cuerpo en cuestión, entonces la radiación emergente del mismo tendrá , como en el caso 1a. un espectro en el que se superpone el débil espectro de la radiación incidente (supongamoslo continuo) con la fuerte emisión del cuerpo, que a su vez está gobernada por el perfil de κ_λ (ver figura 2.11).

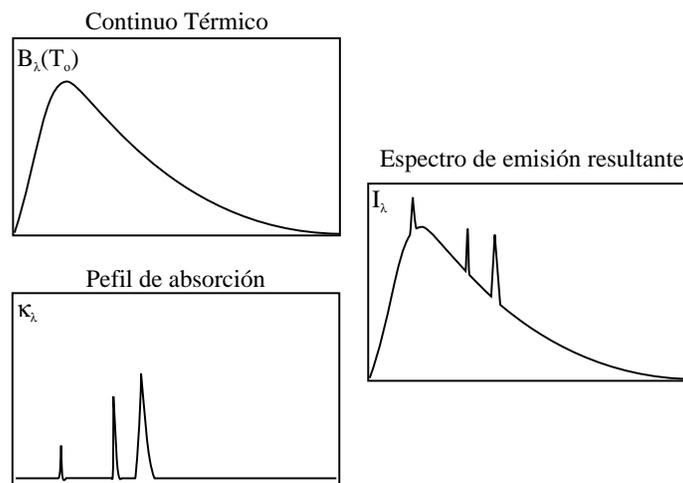


Figura 2.11: Espectro de la radiación que emerge de un cuerpo con gran emisión y sobre el que incide radiación muy tenue con un espectro continuo.

Por otro lado si se cumple que $S_\lambda < I_{\lambda_0}$ la radiación emitida tendrá una intensidad dada por,

$$I_\lambda = I_{\lambda_0} - \kappa_\lambda s \rho | S_\lambda - I_{\lambda_0} |$$

donde de nuevo se ha hecho la suposición de independenciam de κ con τ .

Es este el caso para nosotros más interesante. En esta situación la radiación emergente presentará claras pérdidas causadas por la absorción del medio (nótese el signo menos en la expresión para I_λ) y gobernadas por el perfil de κ_λ (ver figura 2.12). El espectro obtenido será un espectro de absorción, en el que sobre el continuo de la radiación incidente se superpondrán una serie de depresiones que indican las posiciones de máxima absorción del medio.

El análisis anterior nos revela en síntesis la explicación de la naturaleza del espectro de las estrellas : Las capas interiores altamente opacas emiten por 2a. un continuo determinado por una temperatura característica asociada a ellas (por ejemplo $T(\tau = 2/3)$) ; cuando esta radiación atraviesa las capas más exteriores y transparentes ($\tau_\lambda \ll 1$) de la atmósfera, que están a una temperatura inferior y que por tanto emiten radiación con menor intensidad que la emitida por las capas más profundas ($S_\lambda < I_{\lambda_0}$), se produce el fenómeno de absorción selectiva que le imprime al espectro final sus características de absorción.

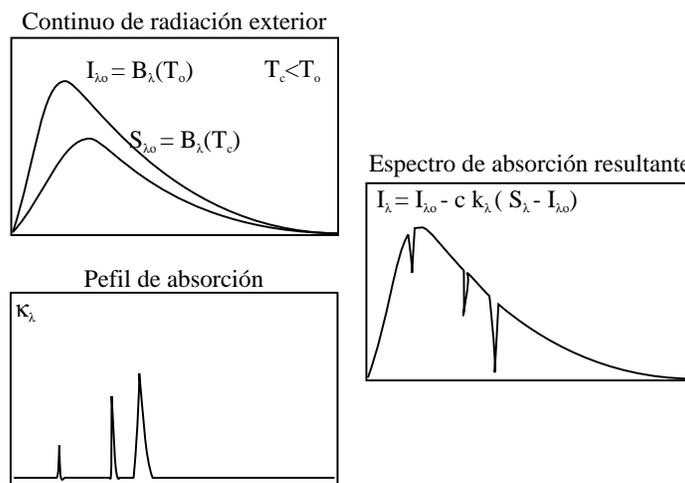


Figura 2.12: Espectro de la radiación que emerge de un cuerpo con una emisión menor a la intensidad de la radiación incidente. Este es el caso para las capas superiores de la atmósfera estelar.

2.4.2 Estructura de las líneas espectrales

Una vez se han producido absorciones en una cierta región alrededor de una longitud de onda establecida sobre el continuo de la luz que emana del interior de la estrella, aparece sobre dicho continuo lo que llamamos una línea espectral de absorción. En la región de las líneas espectrales el continuo se deforma como lo muestra la figura 2.13.

Llamando F_{λ} el flujo radiativo en la longitud de onda λ proveniente de la estrella y $F_{c\lambda}$ el flujo que observaríamos si sólo existiera la contribución del continuo emitido por las regiones más profundas de la misma, podemos construir lo que recibe el nombre de *espectro normalizado* $F_{\lambda}/F_{c\lambda}$ (ver figura 2.14), y que será de ahora en adelante nuestro punto de partida a la hora de estudiar la estructura y el análisis de las líneas espectrales estelares. Sobre el espectro normalizado definimos el *perfil de la línea espectral*, P_{λ} ,

$$P_{\lambda} = 1 - \frac{F_{\lambda}}{F_{c\lambda}}$$

El perfil de la línea es máximo en su centro, $\lambda = \lambda_0$ y crece desde 0 hasta P_{λ_0} para luego decrecer de nuevo hasta 0 a lo largo de todo el ancho real de la línea $\Delta\lambda$.

El interior de la línea define en el plano $F_{\lambda}/F_{c\lambda}$ vs. λ un área total A_{λ_0} dada por,

$$A_{\lambda_0} = \int_0^{\infty} P_{\lambda} = \int_0^{\infty} 1 - \frac{F_{\lambda}}{F_{c\lambda}}$$

Otra cantidad de relevancia en el estudio de las líneas espectrales recibe el nombre de ancho equivalente W_{λ} que se define como el ancho de un rectángulo de altura unitaria

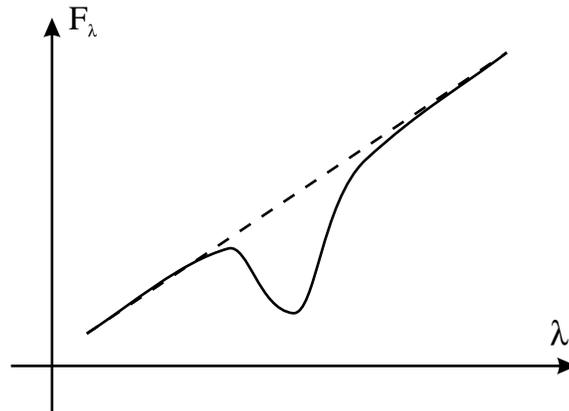


Figura 2.13: Naturaleza del espectro de absorción de una estrella en un diagrama de flujo de radiación contra longitud de onda.

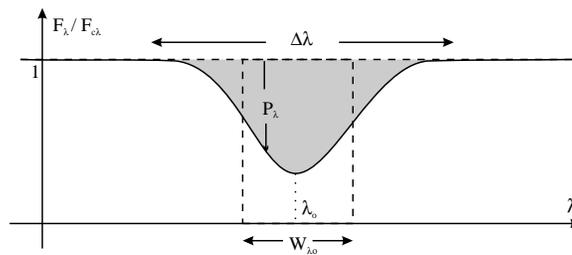


Figura 2.14: Estructura de una línea espectral en un diagrama normalizado.

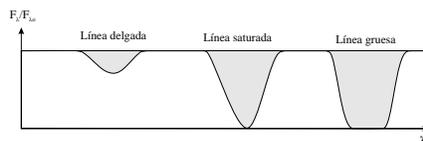


Figura 2.15: Tipos de líneas espectrales.

que en el diagrama espectral normalizado encierra un área igual a la de la línea. Por su definición,

$$W_{\lambda_0} \times 1 = A_{\lambda_0}$$

$$W_{\lambda_0} = \int_0^{\infty} 1 - \frac{F_{\lambda}}{F_{c\lambda}}$$

De acuerdo a la magnitud de los procesos absorbentes, la línea puede ser de tres tipos : Líneas espectrales delgadas (*thin lines*), líneas espectrales saturadas y líneas espectrales gruesas (*thick lines*). (Ver figura 2.15).

En la región de las líneas espectrales delgadas el espectro de la estrella se aleja levemente del continuo en su base ($P_{\lambda} \ll 1$). Cuando los procesos absorbentes son suficientemente intensos gran parte de la emisión del continuo en la longitud de onda central de la línea desaparece del espectro estelar ($P_{\lambda_0} \approx 1$) formando lo que se llama una línea espectral saturada. Si la intensidad de los procesos de absorción se extiende incluso más allá y más aca de la longitud de onda central, la línea adquiere una perfil particular con pendientes regulares y una base aplanada ($P_{\lambda} \approx 1$, para $\lambda_0 - \epsilon < \lambda < \lambda_0 + \epsilon$) ; este tipo de líneas espectrales reciben el nombre de líneas espectrales gruesas.

Dado que son los procesos de absorción los que determinan en última instancia la estructura de las líneas espectrales, nos ocuparemos un momento de estudiar los principales procesos en la materia estelar que contribuyen a la extracción de energía de la radiación que la atraviesa. Nos propondremos también establecer de que manera cantidades como la opacidad de la materia en la atmósfera estelar determinan el perfil de las líneas de absorción.

En general, el fenómeno de absorción ocurre cuando un trozo de materia por sus propiedades particulares roba por un momento energía a la radiación que lo atraviesa en una determinada longitud de onda devolviendola (en la situación general) posteriormente en la forma de radiación con otra longitud de onda o con la misma pero emitida en una dirección distinta de la original.

Microscopicamente se reconocen fundamentalmente 4 procesos posibles de absorción en la materia estelar.

1. *Absorción por transición ligado - ligado (bound-bound)*

En este proceso uno de los átomos del medio con un electrón en un estado ligado absorbe un fotón con una longitud de onda precisa proceso en el cual el electrón correspondiente realiza una transición a otro estado ligado. Este tipo de proceso es el principal responsable de la formación de regiones localizadas de absorción en el espectro estelar, i.e. líneas espectrales.

La opacidad del medio en virtud de estos procesos, $\kappa_{\lambda,bb}$ dependerá de la composición química y las condiciones particulares a la que se encuentren sometidos los átomos del medio.

2. *Absorción por transición ligado - libre (bound-free)* Las transiciones ligado - libre corresponden a procesos de ionización en los cuales un electrón en un estado ligado de un átomo particular recibe de la radiación electromagnética que baña el medio la energía suficiente para superar la barrera impuesta por el potencial de ionización proceso en el cual queda finalmente en un estado libre caracterizado por una energía cinética definida.

Este tipo de procesos como es de esperarse por su propia naturaleza tienen una contribución continua a la absorción del medio, esto es fotones de muchas longitudes de onda serán absorbidos dejando en cada caso al electrón en un estado libre correspondiente a una energía cinética distinta.

3. *Absorción por transición libre - libre (free - free)* En este proceso un fotón es absorbido completamente por un electrón que se encuentra en un estado libre produciendo el cambio en el estado del electrón hacia otro estado también libre (cambia su momentum). Las transiciones libre - libre pueden ser producidas por fotones de muy distintas longitudes de onda, con lo que este proceso realiza también un aporte continuo a la absorción de la materia estelar.
4. *Absorción por dispersión electrónica (electron scattering)* Los procesos de dispersión electrónica o dispersión de Thomsom tienen lugar cuando un fotón del medio es dispersado por un electrón en un estado libre. Fotones de todas las longitudes de onda pueden ser dispersados por este proceso, que es además altamente improbable y que sólo se vuelve importante a muy altas temperaturas. El aporte que hace a la absorción de la materia estelar es como en los dos casos anteriores continuo.

La opacidad total del medio κ_{λ} será , teniendo en cuenta la contribución de cada proceso, igual a,

$$\kappa_{\lambda} = \kappa_{\lambda,bb} + \kappa_{\lambda,bf} + \kappa_{\lambda,ff} + \kappa_{\lambda,es}$$

que se puede considerar también como la suma de una contribución "puntual" a la absorción $\kappa_{\lambda,l} = \kappa_{\lambda,bb}$ y la contribución continua a la misma $\kappa_{\lambda,c} = \kappa_{\lambda,bf} + \kappa_{\lambda,ff} + \kappa_{\lambda,es}$, así

,

$$\kappa_\lambda = \kappa_{\lambda,l} + \kappa_{\lambda,c}$$

Conocido en algún detalle los distintos mecanismos que dan lugar a la absorción en el seno de la atmósfera estelar indagemos ahora por la manera como, los procesos de absorción descritos afectan la radiación que la atraviesa generando líneas con perfiles definidos, i.e. busquemos la conexión explícita entre el perfil P_λ de una línea y el valor de la opacidad en las longitudes de onda correspondientes a ella.

Por simplicidad, consideremos la formación de una línea delgada, i.e. $P_\lambda \ll 1$. Para el caso es de esperarse que exista una dependencia directa entre la opacidad puntual $\kappa_{\lambda,l}$, y el mencionado perfil, de modo que para un medio muy opaco en una cierta longitud de onda la profundidad de la línea correspondiente sea también mayor.

Asumamos para la atmósfera la validez de todas las suposiciones y por tanto los resultados obtenidos en la sección 2.3. Según dichos resultados podemos asumir que el flujo radiativo F_λ correspondiente a cualquier longitud de onda en el espectro de la estrella, es igual en virtud de la relación de Eddington Barbier al valor del flujo B_λ que emana de un cuerpo negro con la temperatura de una capa para la cual $\tau_\lambda = 2/3$. El flujo esperado en el continuo $F_{c\lambda}$ sobre el que se superponen las líneas espectrales, gozará de las mismas características pero la profundidad óptica a considerar será la correspondiente a la absorción en el continuo caracterizada por la opacidad $\kappa_{\lambda,c}$. En virtud de esto, el perfil de la línea espectral delgada considerada, evaluado en una longitud de onda λ en su interior estará dado, por definición, en los siguientes términos,

$$P_\lambda = \frac{F_{c\lambda} - F_\lambda}{F_{c\lambda}}$$

$$P_\lambda = \frac{B_\lambda(\tau_{\lambda,c} = 2/3) - B_\lambda(\tau_{\lambda,l} = 2/3)}{B_\lambda(\tau_{\lambda,c} = 2/3)}$$

Dado que $P_\lambda \ll 1$, $F_\lambda \approx F_{c\lambda}$, de aquí se sigue por tanto que la región en la atmósfera desde la cual es emitida la radiación que contribuye tanto a F_λ como a $F_{c\lambda}$ es aproximadamente la misma, i.e. $\tau_{\lambda,c} \approx \tau_{\lambda,l}$, de donde, asumiendo independencia de κ con la profundidad lineal se puede concluir que $\kappa_\lambda \approx \kappa_{\lambda,c}$ y así $\kappa_{\lambda,l} \ll \kappa_{\lambda,c}$, como era de esperarse para una línea delgada en la que la absorción puntual es casi nula.

La vecindad entre las capas $\tau_{\lambda,c} = 2/3$ y $\tau_\lambda = 2/3$, nos permite realizar una expansión de $B_\lambda(\tau_\lambda = 2/3)$ alrededor de $\tau_{\lambda,c}$ que tiene la forma,

$$B_\lambda(\tau_\lambda = 2/3) \approx B_\lambda(\tau_{\lambda,c} = 2/3) + \left. \frac{dB_\lambda}{d\tau_{\lambda,c}} \right|_{\tau_{\lambda,c}=2/3} \Delta\tau_{\lambda,c}$$

el perfil de la línea queda por tanto,

$$P_\lambda = - \left. \frac{d(\ln B_\lambda)}{d\tau_{\lambda,c}} \right|_{\tau_{\lambda,c}=2/3} \Delta\tau_{\lambda,c}$$

por otro lado tenemos, despreciando la dependencia de la opacidad con la profundidad líneal, la sencilla relación entre τ_λ y $\tau_{\lambda,c}$,

$$\frac{\tau_\lambda}{\tau_{\lambda,c}} = \frac{\kappa_{\lambda,l} + \kappa_{\lambda,c}}{\kappa_{\lambda,c}}$$

De aquí tomando $\kappa_{\lambda,l} \ll \kappa_{\lambda,c}$ se obtiene por una sencilla manipulación algebraica que,

$$\tau_{\lambda,c} \approx \tau_\lambda \left(1 - \frac{\kappa_{\lambda,l}}{\kappa_{\lambda,c}}\right)$$

cuando $\tau_\lambda = 2/3$ tenemos,

$$\tau_{\lambda,c} = 2/3 - \frac{2}{3} \frac{\kappa_{\lambda,l}}{\kappa_{\lambda,c}}$$

de donde,

$$\Delta\tau_{\lambda,c} = -\frac{2}{3} \frac{\kappa_{\lambda,l}}{\kappa_{\lambda,c}}$$

Finalmente el perfil de la línea queda,

$$P_\lambda = \frac{2}{3} \frac{\kappa_{\lambda,l}}{\kappa_{\lambda,c}} \left. \frac{d(\ln B_\lambda)}{d\tau_{\lambda,c}} \right|_{\tau_{\lambda,c}=2/3} \quad (2.18)$$

Una consecuencia interesante en nuestro conocimiento de la estructura de las líneas espectrales se sigue de la última relación : En ella es clara la conexión directa existente entre el valor del perfil de la línea y la opacidad de la materia en la longitud de onda correspondiente. La importancia de este resultado radica en el hecho de que el comportamiento de $\kappa_{\lambda,l}$ determinara completamente la forma de la línea y viceversa el estudio de la línea nos informará de la manera como absorbe radiación en distintas longitudes de onda la materia estelar. Es esta doble relación la que le permite al astrofísico extraer un gran volumen de información examinando sólo el espectro de la estrella.

Nos resta por ahora preguntarnos, para distintas condiciones materiales i , qué forma adopta la opacidad puntual $\kappa_{\lambda,i}$?

La más sencilla situación considerada es aquella en la cual la opacidad puntual se hace cero en todas las longitudes de onda excepto en aquella correspondiente a la línea misma. En ese caso ella, al heredar las propiedades de κ en virtud de 2.18, se nos presenta como infinitamente delgada.

La situación real es sin embargo enteramente distinta : las líneas presentan anchos finitos, lo que por tanto implicará que la opacidad puntual es distinta de cero incluso en las vecindades de la longitud de onda central. Este fenómeno recibe el nombre de ensanchamiento de la línea y obedece a distintos mecanismos conectados con su formación. A continuación estudiaremos los distintos procesos por los cuales la opacidad puntual sufre un ensanchamiento responsable por el ancho finito observado de las líneas espectrales.

1. *Ensanchamiento natural*

Como vimos las líneas espectrales de absorción aparecen en el espectro de una estrella cuando tienen lugar en la atmósfera de la misma procesos de absorción correspondientes a transiciones electrónicas entre estas ligados de un átomo. La transición electrónica puede en general ocurrir entre estados excitados del átomo considerado. Un estado atómico excitado se caracteriza por tener un tiempo de vida finito : el estado es inestable. Si se pretendiera realizar una medida de la energía del electrón en un estado como este, se contaría sólo con un tiempo $t_{1/2}$ (vida media del estado) para hacerlo. El valor de la energía obtenido tendría una incertidumbre, en virtud del principio de Heisenberg, dado por,

$$\Delta E = \frac{h}{2\pi t_{1/2}}$$

Para realizar una transición entre dos estados inicial y final, con energías E_i y E_f , es necesaria la absorción de un fotón con longitud de onda,

$$\lambda = \frac{hc}{E_f - E_i}$$

pero la energía de ambos estados es incierta por su tiempo de vida finito, lo que introduce una incertidumbre en la longitud de onda del fotón absorbido dada por,

$$\Delta\lambda = \frac{hc}{(E_f - E_i)^2}(\Delta E_f + \Delta E_i)$$

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2\pi c} \left(\frac{1}{t_{1/2f}} + \frac{1}{t_{1/2i}} \right)$$

Esto es, el átomo considerado no sólo estará en capacidad de absorber fotones con la longitud de onda correspondiente al valor exacto de la diferencia de energía entre los estados, sino que otros fotones de longitudes de onda en el rango $(\lambda_o - \Delta\lambda/2, \lambda_o + \Delta\lambda/2)$ podrán también ser absorbidos en virtud de la incertidumbre que gozan las energías individuales de los estados inicial y final.

Este fenómeno recibe el nombre de *Ensanchamiento Natural de la Línea Espectral* y aparece en general en las líneas producidas en todas las condiciones por cualquier cuerpo. En este sentido el fenómeno es inherente a la naturaleza misma del proceso de absorción o emisión por transiciones ligado - ligado.

Una cosa debe aclararse. Aunque fotones con longitudes de onda cercanas a la central pueden ser absorbidos también, la intensidad o frecuencia con que serán retenidos por el medio, dependerá de la "distancia" a la que se encuentren del centro de la línea : fotones con longitudes de onda igual a la central serán abundantemente

retenidos y la probabilidad de retención disminuirá gradualmente hacia las alas de la misma. El fenómeno conduce a la clásica estructura de las líneas.

Cálculos detallados demuestran que el coeficiente de absorción puntual para una longitud de onda λ cercana al centro de la línea se comporta como $\frac{1}{|\lambda - \lambda_0|^2}$. Lo que da al perfil de la línea una dependencia similar con λ . Este tipo de perfil particular se conoce como *perfil de Lorentz*.

2. *Ensanchamiento colisional o por presión*

En el medio en el que se produce una línea espectral (un gas por ejemplo) pueden ser frecuentes las colisiones con átomos o iones del mismo medio. Durante el proceso de colisión la interacción de los electrones de uno de los átomos con el núcleo y la nube de electrones del otro puede alterar la estructura de los niveles de energía de ambos. En el proceso la energía de transición entre dos niveles vecinos puede alterarse también admitiendo la posibilidad de que otros fotones con longitudes de onda distintas de la correspondiente a la diferencia de energía inicial puedan ser absorbidos. El fenómeno conduce finalmente a un ensanchamiento en las líneas producidas por transiciones entre estados que son alterados por las colisiones. De manera natural este tipo de alteración de las líneas espectrales recibe el nombre de *Ensanchamiento por colisiones*.

Para cuantificar el efecto utilizemos el resultado obtenido en el numeral anterior,

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2\pi c} \left(\frac{1}{t_{1/2f}} + \frac{1}{t_{1/2i}} \right)$$

Para simplificar nuestro análisis asumamos que se produce una transición entre un estado excitado alterado por la colisión y con vida media $t_{1/2}$ y uno estable y prácticamente inalterado por la colisión. La interpretación de $t_{1/2}$ será para este caso algo distinta : se pretende ahora realizar una medida de la energía de un estado electrónico dado. La energía de dicho estado sin embargo es alterada por un proceso colisional que tiene una duración media $t_{1/2}$ y que corresponde al plazo con el que se cuenta para realizar la medida.

¿Cuál es ahora el tiempo medio que dura una colisión en el medio considerado ?.

Imaginemos un medio formado por partículas esféricas (átomos o iones) de radio r_a , tal que n es su densidad numérica (ver figura 2.16). Sigamos la pista de una de las partículas que en relación al medio en reposo se mueve con velocidad v constante. La geometría de la partícula considerada implicará que en su camino interactúa sólo con otras partículas cuyo centro se encuentra a una distancia $2r_a$ del suyo propio. Podemos por tanto simplificar aun más la situación imaginando que estudiamos en lugar del movimiento de una partícula esférica de radio r_a en medio de otras partículas idénticas, el movimiento de una partícula de radio $2r_a$ en medio de puntos con la misma densidad numérica originalmente supuesta.

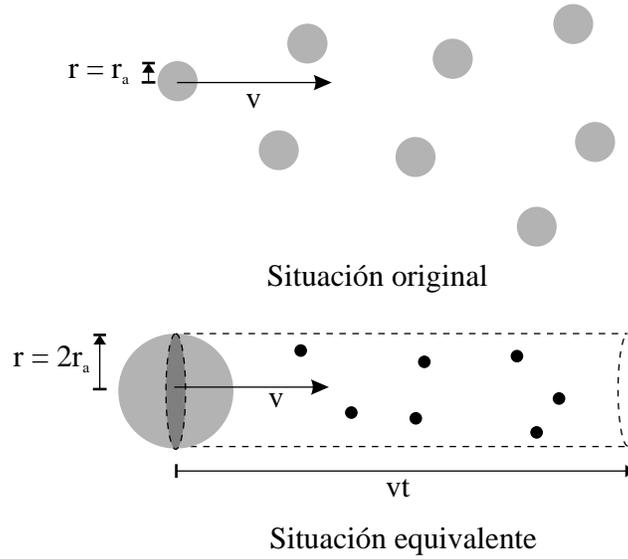


Figura 2.16: Un medio formado por partículas esféricas de radio r_a .

Supongamos que transcurre un tiempo t , durante el cual nuestra partícula recorre una distancia vt encontrando en el camino un total N de puntos con los que interactúa. El volumen cubierto por la esfera en movimiento en el tiempo considerado, será igual al volumen de un cilindro de radio $2r_a$ y altura vt (ver figura 2.16). De modo que N estará dado por,

$$N = n \times [\pi(2r_a)^2 \times vt] = n\sigma vt$$

donde σ es la sección eficaz (*cross section*) para la esfera considerada. El camino libre medio de la partícula en el medio estará así dado por,

$$l = \frac{d}{N} = \frac{1}{n\sigma}$$

y el tiempo medio de interacción puede considerarse igual a,

$$t_{1/2} = \frac{l}{v} = \frac{1}{n\sigma v}$$

Finalmente el ensanchamiento producido por el fenómeno de colisiones en el medio será ,

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2\pi c} n\sigma \sqrt{\frac{2kT}{\bar{m}}}$$

Donde hemos asumido que $v = \sqrt{2kT/\bar{m}}$ es la velocidad promedio de una partícula en un medio a una temperatura T , formada por partículas de masa media \bar{m} y con una distribución maxwelliana de velocidades.

El fenómeno de ensanchamiento por colisiones explica las diferencias espectrales existentes entre los tipos de Morgan y Keenan. En la sección 1.8 habíamos hecho notar que cuando se examinan los espectros de estrellas del mismo tipo de Harvard se nota que el ancho total de las líneas, las mismas para todos, variaba de unas estrellas a otras, siendo mayor cuando la estrella era menos luminosa y menor en la situación contraria. Ahora estamos en capacidad de explicar el fenómeno : Las estrellas menos luminosas, y por tanto las más pequeñas, tienen atmósferas más densas (mayor n) que las estrellas más luminosas. De la expresión para el ensanchamiento colisional se sigue que sus líneas deben ser por tanto más anchas que las correspondientes a las de estrellas, con la misma temperatura, pero más luminosas, i.e. más grandes.

El similar origen del ensanchamiento natural y el ensanchamiento por colisiones implica que en el último caso como en el primero se produce un perfil lorentziano para la línea.

3. *Ensamchamiento Doppler*

El efecto doppler producido por el movimiento constante de las partículas de un medio que produce una línea espectral es la más natural y directa fuente de ensanchamiento de una línea espectral.

Imaginemos un haz de radiación que atraviesa un medio formado por átomos de un mismo tipo y que están en capacidad de absorber en reposo un fotón de longitud de onda λ_o . El haz de radiación sin embargo encuentra los átomos en muy distintos estados de movimiento : algunos de ellos tendrán una velocidad que es perpendicular a la dirección de propagación de la radiación y por tanto absorberán los fotones que tengan exactamente longitud de onda λ_o ; otros sin embargo tendrán una velocidad en la dirección de propagación de la radiación, llendo a su encuentro por lo que absorberán fotones con longitudes de onda mayor que λ_o , o en dirección contraria absorbiendo fotones con longitud de onda menor que λ_o . El resultado final será que fotones de longitudes de onda vecinas a λ_o serán absorbidos, produciendo un ensanchamiento de la línea correspondiente.

Si asumimos que la velocidad promedio de las partículas del medio está dada en virtud de la estadística de Maxwell, por $v = \sqrt{2kT/\bar{m}}$, por efecto Doppler la máxima y la mínima longitud de onda absorbida por el medio será :

$$\frac{|\lambda - \lambda_o|}{\lambda_o} = \frac{v}{c}$$

el ensanchamiento doppler total estará finalmente dado por,

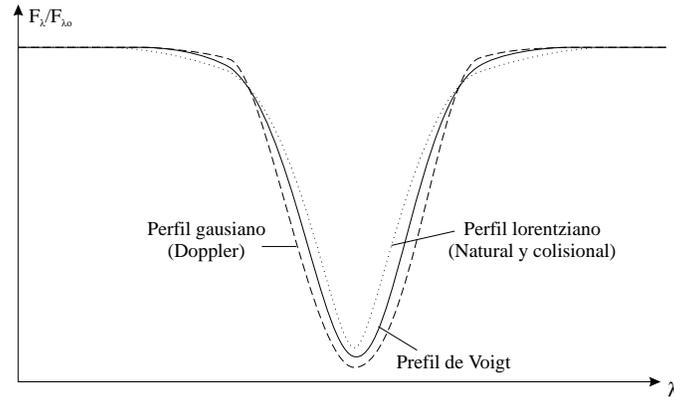


Figura 2.17: Perfil de Voigt de una línea espectral.

$$\Delta\lambda = \frac{2\lambda}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

La forma de la distribución de las componentes de la velocidad de las partículas del medio en la dirección de propagación de la radiación, revela que el perfil de la línea ensanchado por efecto doppler es un perfil que cae como $\exp(\lambda - \lambda_o)$, que recibe el nombre de *perfil Gaussiano*.

La línea formada finalmente y afectada por los distintos procesos descritos, poseerá un perfil que resulta de la superposición de los perfiles lorentzianos introducidos por los ensanchamientos colisional y natural y el perfil gaussiano por el que es responsable el ensanchamiento doppler. Este perfil total recibe el nombre de *perfil de Voigt* (ver figura 2.17). Las líneas con un perfil de Voigt se dice que tienen núcleos Doppler (cerca al centro el ensanchamiento Doppler es más acusado) y alas lorentzianas (en la región de las alas de la línea, donde el efecto introducido por doppler ha desaparecido casi completamente, aun se mantiene la alteración producida por las colisiones).

2.5 Análisis Espectral

Los resultados obtenidos hasta ahora del estudio de la estructura y formación de las líneas espectrales nos revelan que el espectro de la estrella es una fuente de abundante información acerca de aspectos como la composición química y las condiciones de la materia que constituyen la atmósfera estelar.

Se da el nombre de análisis espectral, al conjunto de herramientas teóricas utilizadas para, a partir del estudio de la estructura de las líneas en el espectro de una estrella obtener información relativa a la misma. El objetivo de esta sección será el de revisar algunas de

estas herramientas mostrando de manera natural algunos de los resultados más conocidos conectados con las estrellas y que se siguen del estudio de su espectro.

2.5.1 La curva de crecimiento

Imaginemos una línea espectral particular que es producida por una especie atómica dada, cuando se produce una transición desde un estado inicial a un estado final bien definido. La cantidad de átomos o iones que absorben radiación que contribuye a la formación de la línea considerada afectará directamente las características de la misma : un mayor número de absorbentes potenciales causará por ejemplo un aumento de la profundidad y el ancho mismo de la línea espectral, es decir de su área total.

En esta sección trataremos de mostrar como afecta el número de átomos o iones absorbentes las características de una línea espectral. En nuestro análisis utilizaremos como parámetro de relevancia el conocido como *ancho equivalente* de la línea espectral, el que está como lo vimos en la sección anterior directamente relacionado con su área.

Un cálculo preciso de la opacidad puntual $\kappa_{\lambda,l}$ en una línea espectral dada demuestra en general una dependencia lineal de dicha opacidad con el parámetro $N_a f$, donde N_a representa el número de átomos potencialmente absorbentes en el interior de un cilindro de area transversal unitaria y que se extiende desde la estrella hasta el observador ; f es un parámetro atómico conocido como *la intensidad del oscilador* y que está directamente relacionado con la probabilidad de que se produzca la transición atómica correspondiente a la línea espectral considerada, frente a otras transiciones posibles desde el estado en el que se encuentran los átomos potencialmente absorbentes.

¿ De qué manera depende el ancho equivalente W_{λ_0} de $N_a f$?.

Por la definición de W , este se encuentra directamente relacionado con el perfil P de la línea. La pregunta anterior se convierte por tanto en cómo está relacionado el perfil de la línea con el parámetro mencionado.

En la sección anterior mostramos que para líneas delgadas ($\kappa_{\lambda,l} \ll \kappa_{\lambda,c}$) el perfil estaba dado por,

$$P_{\lambda} = \frac{2}{3} \frac{\kappa_{\lambda,l}}{\kappa_{\lambda,c}} \left. \frac{d(\ln B_{\lambda})}{d\tau_{\lambda,c}} \right|_{\tau_{\lambda,c}=2/3}$$

Aquí encontramos una dependencia explícita del perfil con la opacidad que a su vez está relacionada con el parámetro de interés $N_a f$. Pero, ¿ qué sucede en el caso de líneas saturadas o gruesas ($\kappa_{\lambda,l} \geq \kappa_{\lambda,c}$) ? . La expresión anterior deja de tener validez en este caso y cualquier dependencia explícita del perfil con la opacidad puntual es muy difícil de obtener. Sin embargo es posible intentar construir una expresión general para el perfil basada en la obtenida para el caso de líneas delgadas y la cual tenga como característica que en los límites cuando $\kappa_{\lambda,l} \ll \kappa_{\lambda,c}$ y $\kappa_{\lambda,l} \gg \kappa_{\lambda,c}$ reproduzca las situaciones conocidas. Introduzcamos la función $X(\lambda)$ dada por

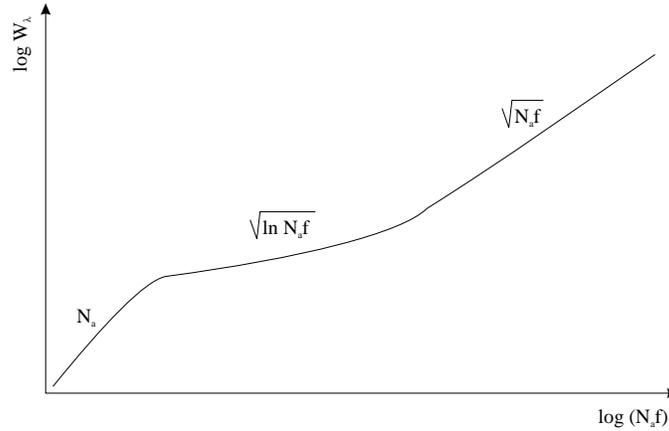


Figura 2.18: La curva de crecimiento.

$$X(\lambda) = \frac{2}{3} \frac{\kappa_{\lambda,l}}{\kappa_{\lambda,c}} \left. \frac{d(\ln B_\lambda)}{d\tau_{\lambda,c}} \right|_{\tau_{\lambda,c}=2/3}$$

Con base en ella podemos por razones que examinaremos a continuación construir el siguiente perfil propuesto, valido tanto para las líneas delgadas como para las líneas gruesas,

$$P_\lambda = \frac{X(\lambda)}{X(\lambda) + 1}$$

nótese que cuando $\kappa_{\lambda,l} \ll \kappa_{\lambda,c}$, $X(\lambda) \ll 1$ y $P_\lambda = X(\lambda)$. Este corresponde al caso de líneas delgadas. Por otro lado cuando $\kappa_{\lambda,l} \gg \kappa_{\lambda,c}$, $P_\lambda \approx 1$, que coincide con la situación de una línea saturada y gruesa. El perfil propuesto satisface las condiciones asintóticas exigidas y puede considerarse una buena aproximación al perfil real.

Dada la dependencia conocida de $X(\lambda)$ con el parámetro $N_a f$ hemos encontrado finalmente la manera como depende en general el perfil de la línea y por tanto el ancho equivalente con el parámetro mencionado,

$$W_\lambda(N_a f) = \int_0^\infty \frac{X(\lambda)}{X(\lambda) + 1}$$

Esta última función recibe el nombre de *curva de crecimiento* y expresa la relación existente entre el área de una línea espectral y el número de absorbentes potenciales presentes en la atmósfera estelar.

El cálculo preciso de W para una línea particular nos permite construir la gráfica de la figura 2.18.

En la curva de crecimiento se reconocen claramente 3 regiones : en una primera, el área de la curva (recuerdese que está cuantificado por W_{λ_0}) es directamente proporcional al

número de átomos N_a ; esta región corresponde a la situación de no saturación. Cuando la línea se satura el área sigue creciendo conforme crece N_a pero por claras razones lo hace a una menor rata ($W_{\lambda_0} \sim \sqrt{\ln(N_a f)}$). Cuando el ancho de la línea se ha hecho suficientemente grande empiezan a ser importantes los efectos del perfil lorentziano y la línea que antes se veía como una caja rectangular empieza a tener alas cada vez más profundas y extensas ; esto causa un aumento en la velocidad de crecimiento del área de la línea que se manifiesta en la curva como una dependencia $W_{\lambda_0} \sim \sqrt{N_a f}$.

En el trabajo práctico, una vez obtenido el espectro de la estrella y medido el ancho equivalente de una línea de interés se procede a buscar, utilizando la curva de crecimiento correspondiente, el valor de N_a .

2.5.2 Las ecuaciones de Boltzmann y Saha

¿ Es el número de átomos o iones que pueden absorber radiación correspondiente a una cierta línea espectral, un indicativo directo de la cantidad total de átomos o iones de la especie considerada presentes en la atmósfera estelar ?, esto es, si se observan muy pocos átomos de Hidrogeno que pueden absorber por ejemplo fotones correspondientes a la línea H_α de la serie de Balmer, entonces ¿ es necesario concluir que existen muy pocos átomos de Hidrógeno en la atmósfera estelar ?. La respuesta obvia es : NO.

Los átomos de una determinada especie estarán distribuidos, en determinadas condiciones, en los distintos estados energéticos disponibles. El número de átomos que pueden absorber una cierta longitud de onda dependerá de la fracción del total de átomos de la especie dada que estén en el estado enrgético correspondiente, fracción que puede ser en algunos casos igual a cero. Así por ejemplo la no detección de la línea H_α en el espectro de una estrella no será pues un indicativo de la ausencia total de átomos de hidrógeno en su atmósfera.

El objetivo de esta sección será mostrar como en determinadas condiciones se puede calcular la distribución de los átomos o iones de una especie en los estados energéticos disponibles, lo que nos permitirá construir herramientas matemáticas para a partir de la cantidad de átomos de una especie que producen una línea dada deducir la cantidad total de átomos de esa especie presentes en la atmósfera estelar.

Consideremos un gas formado por átomos de una especie particular. En el gas, que está a una temperatura T, existen un total N de dichos átomos. Todos se encuentra inicialmente en un estado caracterizado por la energía E_1 (el estado base por ejemplo). Las colisiones con otros átomos pueden ceder la enrgía necesaria para que el átomo realice una transición a un estado superior caracterizado por la energía E_n . La probabilidad de que esta transición ocurra, puede considerarse igual a la probabilidad de que en una colisión el proyectil (otro átomo) tenga exactamente una energía $E_n - E_1$; si suponemos que el gas es descrito por la estadística de Maxwell-Boltzmann, la probabilidad es,

$$P(E = E_n - E_1) \sim \exp(-(E_n - E_1)/kT)$$

Si suponemos que existen g_n estados electrónicos distintos para los cuales la energía es la misma E_n la probabilidad de que una colisión deje a un átomo en el estado n estará entonces dada por,

$$P(n) \sim g_n \exp(-(E_n - E_1)/kT)$$

del total N de átomos en el gas estarán en el estado n , un número N_n dado por,

$$N_n = N \times P(n) \sim N g_n \exp(-(E_n - E_1)/kT)$$

y la razón entre el número de átomos en el estado n y el número de los que están en el estado m será ,

$$\frac{N_n}{N_m} = \frac{g_n}{g_m} \exp(-(E_n - E_m)/kT) \quad (2.19)$$

La anterior expresión recibe el nombre de *ecuación de Boltzmann*, y describe la distribución de los átomos del gas considerado entre los estados energéticos ligados disponibles. Nótese que dicha distribución dependerá de la temperatura del gas, lo que nos da un primer indicativo de que las líneas presentes en el espectro de una estrella no sólo dependen de la composición química de la estrella sino también de la temperatura a la que se encuentran los gases en su atmósfera.

En la descripción que hemos hecho en los párrafos anteriores, consideramos un gas formado por átomos neutros. ¿ Qué pasa si se dan las condiciones (altas temperaturas que hacen muy violentas las colisiones, un alto flujo de radiación muy energética, etc.) para que algunos de los átomos se ionizen ?. En este caso y dada la distinta estructura energética de los iones formados, cada uno de ellos deberá ser tratado como una especie distinta, y la distribución de los átomos en los diferentes estados disponibles deberá tener ahora en cuenta la posibilidad de que el átomo pase a otro estado de ionización ⁹.

Considérese un átomo en el estado de ionización i -ésimo ($i=1$ (átomo neutro), 2 (perdida de 1 electrón), 3 (perdida de 2 electrones)...). La probabilidad de que ese átomo pase, por colisiones, al estado de ionización inmediatamente superior $i+1$, estará dada por,

$$P(i \rightarrow i + 1) = P(i + 1) \sim Z_{i+1} \exp(-\chi_i/kT)$$

donde χ_i es la energía necesaria para arrancar un electrón al ion i -ésimo y convertirlo en el ion $i+1$. Esta energía recibe el nombre de *potencial de ionización*. El factor Z_{i+1} que aparece en la expresión anterior indica el número de configuraciones electrónicas posibles en las que puede encontrarse el ion $i + 1$ después de la transición. Esta es la conocida función de partición de la física estadística y está dada para el caso considerado por,

⁹Los distintos iones de una especie atómica dada se representan con el símbolo de la especie dada y un número romano que indica el estado de ionización correspondiente. Así el ion HI correspondiera al primer estado de ionización que por convención es aquel estado en el que se han perdido 0 electrones, esto es HI representa el átomo neutro. HII es el segundo estado de ionización del Hidrógeno y corresponde a la pérdida de 1 electrón. FeVI el ion de Hierro que ha perdido 15 electrones, y así sucesivamente.

$$Z_i = \sum_{j=1}^{\infty} g_j \exp(-(E_j - E_1)/kT)$$

donde g_j representa el grado de degeneración del estado electrónico caracterizado por la energía E_j , con $j = 1$ para el estado base del ion.

Un cálculo detallado muestra finalmente que la razón entre el número de iones en el estado $i+1$ y aquellos que se encuentran en el estado i , estará dada por,

$$\frac{N_{i+1}}{N_i} = \frac{Z_{i+1}}{Z_i} \frac{2kT}{P_e} \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} \exp(-\chi_i/kT) \quad (2.20)$$

Esta última recibe el nombre de *ecuación de Saha* y cuantifica la distribución de los átomos del gas en los distintos estados de ionización disponibles.

En la ecuación de Saha P_e representa la presión electrónica que se relaciona con la densidad numérica de electrones por la expresión, $P_e = n_e kT$. La presencia de esta cantidad en la ecuación 2.20 se debe al hecho de que los electrones libres en el medio pueden recombinarse con los iones presentes y disminuir así la concentración de los mismos.

Las ecuaciones de Boltzmann y Saha son las principales herramientas teóricas disponibles para determinar, utilizando observaciones espectrales, la composición química de una estrella. En el siguiente ejemplo se ilustra la manera como son utilizadas.

Ejemplo 1

Las líneas de Balmer son producidas cuando el átomo de Hidrogeno realiza transiciones desde o hacia el segundo estado electrónico. Realizar una gráfica en la que se muestre la dependencia con la temperatura de la intensidad (el área) de las líneas de esta serie espectral, en el rango $2000 K < T < 20000 K$.

Solución

Habíamos dicho en la sección anterior que la intensidad de una línea dependía en general de la cantidad presente átomos que pueden producirla. En el caso de todas las líneas de la serie de Balmer, sólo los átomos de Hidrogeno que se encuentren en el segundo estado energético pueden producir la absorción correspondiente. Será nuestro interés inicial por tanto determinar, con la ayuda de las ecuaciones de Boltzmann y Saha, la manera como varía con la temperatura la concentración de átomos de Hidrógeno en este estado energético.

La energía necesaria para que un átomo de hidrogeno inicialmente en el estado base haga una transición al tercer nivel, resulta, por lo que conocemos de su estructura, igual a $E_3 - E_1 = 13,6eV(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2}) \approx 12eV$. A una temperatura muy alta, digamos $T = 20000K$ la energía media involucrada en las colisiones atómicas es $kT = 1,7eV$. Este razonamiento nos muestra que en general podemos considerar que todos los átomos de hidrógeno en estado neutro se

encuentran en el estado base o en el primer estado excitado. Esto nos da la posibilidad de escribir

$$\frac{N_2}{N_{TOT}} = \frac{N_2}{N_2 + N_1} \frac{N_I}{N_{TOT}} \quad (2.21)$$

pero todos los átomos de hidrógeno del gas pueden encontrarse sólo en los dos primeros estados de ionización (el tercero no existe), así que $N_{TOT} = N_I + N_{II}$. La ecuación anterior puede escribirse por tanto así

$$\frac{N_2}{N_{TOT}} = \frac{1}{1 + N_2/N_1} \frac{1}{1 + N_{II}/N_I}$$

La ecuación de Boltzmann nos permite calcular dada la temperatura la razón N_2/N_1 . Para este caso $E_2 - E_1 = 13,6eV(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}) = 10,2eV$. Además, sabemos que el grado de degeneración del estado n -ésimo del átomo de Hidrógeno está dado por $g_n = 2n^2$, así que $g_2 = 8$, $g_1 = 2$. La ecuación de Boltzmann queda por tanto

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{8}{2} \exp(-10,2eV/kT) = 4 \exp(-122695,65K/T)$$

La ecuación de Saha nos permite, por otro lado determinar el valor de la razón N_{II}/N_I . Para este caso $\chi_I = 13,6eV$. La función de partición para el segundo estado de ionización del átomo de hidrogeno tiene el valor trivial $Z_{II} = 1$ dado que sin electrones el átomo sólo tiene disponible un estado posible correspondiente al del núcleo desnudo. Para el primer estado de ionización nos enfrentamos con una suma infinita de términos (cada uno correspondiente a un estado excitado del átomo neutro) sin embargo la presencia del exponencial $\exp(-(E_j - E_1)/kT)$ nos da la posibilidad de descontar el aporte de los términos con $k > 2$, dado que para ellos y como se mostro anteriormente $E_j - E_1 \gg kT$; así

$$Z_I \approx g_1 + g_2 \exp(-(E_2 - E_1)/kT) = 2 + 8 \exp(-10,2eV/kT) = 2(1 + 4 \exp(-122695,65K/T))$$

Finalmente por la ecuación de Saha obtenemos,

$$\frac{N_{II}}{N_I} = 0,033 \text{m N}^{-1} \text{K}^{-5/2} \frac{1}{1 + 4 \exp(-122695,65K/T)} \frac{1}{P_e} T^{5/2} \exp(-163594,2K/T)$$

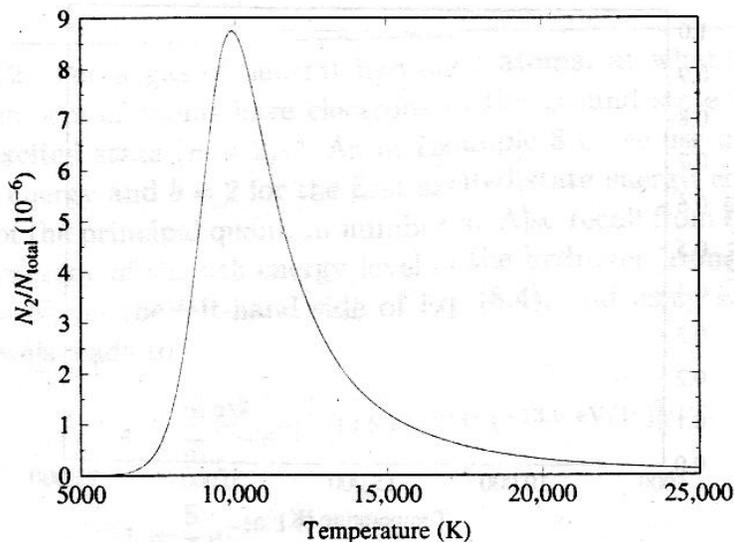


Figura 2.19: Variación con la temperatura de la concentración de átomos de Hidrógeno en el primer estado excitado, y que producen las líneas de Balmer.

Cuando se reemplazan las funciones $N_2/N_1(T)$ y $N_{II}/N_I(T, P_e)$ en 2.21, se obtiene el valor de la concentración de átomos de Hidrógeno que pueden producir las líneas de Balmer a distintas temperaturas y presiones electrónicas. Tomando un valor típico para la presión electrónica $P_e = 50 \text{ Nm}^{-1}$, se construye la gráfica de la figura 2.19.

La dependencia de la intensidad de las líneas espectrales con la temperatura tendrá un comportamiento parecido a la curva presentada; algunas diferencias podrían deberse a efectos de los ensanchamientos descritos y en particular la altura máxima de la curva de intensidad de la línea para cada componente de Balmer dependería de la probabilidad de que se produzca la transición correspondiente a la línea, i.e. de el factor de intensidad del oscilador, f , introducido en la sección anterior.

La curva de la figura muestra un máximo alrededor de los 9900 K: es este el valor de la temperatura de un gas en el cual se producen las líneas de Balmer más intensas. Esto se corresponde muy bien con lo que se encuentra del estudio de los espectros estelares, donde vimos que esta serie de líneas exhibía su máxima intensidad para estrellas del tipo de Harvard A, cuya temperatura promedio resultaba ser precisamente cercana a los 10000 K.

El mismo análisis realizado en el ejemplo para el caso del Hidrógeno, se puede llevar a cabo, con dificultades obviamente superiores, para el caso de otras especies atómicas cuyas

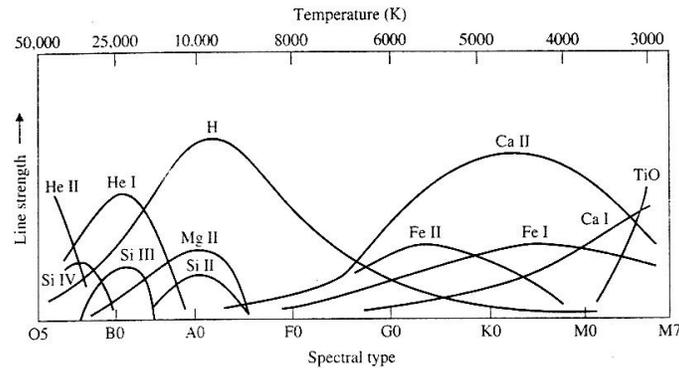


Figura 2.20: Dependencia de la intensidad de las líneas de otros elementos con la temperatura.

líneas están presentes en los espectros estelares (ver figura 2.20). Los resultados de un análisis como este coinciden perfectamente con la información contenida en el sistema de clasificación espectral de Harvard.

Nos resta ahora dar respuesta a la pregunta inicial : el análisis del espectro estelar utilizando la curva de crecimiento permite determinar la cantidad de átomos en el estado energético adecuado para producir la absorción correspondiente a una línea espectral dada. A partir de este valor ζ cómo se determina la cantidad total de átomos de una especie presentes en la atmósfera estelar ?. La respuesta es ahora clara : Una vez se ha obtenido el valor de la temperatura efectiva de la estrella, se determinan por los métodos descritos en esta sección la concentración correspondiente de átomos en el estado considerado. Conociendo el valor total de estos últimos se puede encontrar el número de átomos del tipo correspondiente presentes en la atmósfera estelar.

Utilizando este método ha sido posible determinar con precisión la composición química de muchas estrellas. En la tabla 2.1 se presenta los resultados obtenidos para la que mejor conocemos, nuestro Sol.

2.6 Ejercicios

- 2.1 En la fotosfera solar (primer estrato de la atmósfera solar solar) la densidad media es $\rho = 2,5 \times 10^{-7} \text{gr/cm}^3$. La opacidad de la materia que la constituye es en $\lambda = 5000 \text{\AA}$ es $\kappa_{5000} = 0,264 \text{cm}^2/\text{gr}$. Asumiendo que la opacidad y la densidad no varían con la profundidad en la fotosfera solar, calcular la profundidad lineal para la cual $\tau_{5000} = 2/3$. Interpretar el resultado.
- 2.2 El estudio de la transferencia radiativa en el interior de una atmósfera plano-paralela condujo al siguiente resultado para la intensidad específica en la superficie de dicha atmósfera,

| Elemento | Densidad por columna (gr cm ⁻²) |
|-----------|---|
| Hidrógeno | 1,1 |
| Helio | $4,3 \times 10^{-1}$ |
| Oxígeno | $1,5 \times 10^{-2}$ |
| Carbono | $5,3 \times 10^{-3}$ |
| Neon | $2,7 \times 10^{-3}$ |
| Nitrógeno | $1,5 \times 10^{-3}$ |
| Hierro | $2,9 \times 10^{-3}$ |
| Magnesio | $1,0 \times 10^{-3}$ |
| Silicio | $1,1 \times 10^{-3}$ |
| Azufre | $5,7 \times 10^{-4}$ |

Tabla 2.1: Composición química de nuestro Sol obtenida con las herramientas del análisis espectral.

$$I_{\lambda}(0, \theta) = \int_0^{\infty} S_{\lambda}(\tau_{\lambda}) \exp(-\tau_{\lambda} \sec \theta) d(\tau_{\lambda} \sec \theta)$$

- a. Suponiendo que S_{λ} varía de la forma

$$S_{\lambda}(\tau_{\lambda}) = \sum_{i=0}^n a_{i\lambda} \tau_{\lambda}^i$$

demostrar que

$$I_{\lambda}(0, \theta) = \sum_{i=0}^n i! a_{i\lambda} \cos^i \theta$$

- b. b. Partiendo de la forma encontrada para $I_{\lambda}(0, \theta)$ y de la definición general del flujo radiativo $F_{\lambda}(\tau_{\lambda})$,

$$F_{\lambda}(\tau_{\lambda}) = \int_{4\pi} I_{\lambda}(\tau_{\lambda}, \theta) \cos \theta d\Omega$$

demostrar que

$$F_{\lambda}(0) = \sum_{i=0}^n a_{i\lambda} \frac{2i!}{i+2}$$

- c. mostrar que solo para $n = 1$ se cumple la relación de Eddington-Barbier

$$F_{\lambda}(0) = \pi S_{\lambda}(2/3)$$

- d. De lo anterior mostrar que para una atmósfera gris, con LTE y para un modelo de S_λ como el presentado en a, con $n = 1$ se cumple entonces que,

$$T_{eff} = T(\tau = 2/3)$$

- 2.3 Suponiendo que el perfil de una línea espectral dada puede ser ajustado a la mitad de una elipse cuyo semieje mayor (a) es igual a la profundidad máxima de la línea (P_{λ_0}) y cuyo eje menor ($2b$) es igual al ancho espectral de la misma ($\Delta\lambda$), hallar el ancho equivalente de la línea en términos de $\Delta\lambda$ y P_{λ_0} . Demostrar que el ancho equivalente para esta línea es siempre menor que $\Delta\lambda$.

- 2.4 Un modelo del fenómeno de oscurecimiento del limbo solar asume que

$$\frac{I_\lambda(0, \theta)}{I_\lambda(0, 0)} = A_0 + A_1 \cos \theta + A_2 \cos^2 \theta$$

los valores de los coeficientes A_i fueron determinados cuando se midió el efecto en una longitud de onda $\lambda = 5010\text{\AA}$. los resultados fueron : $A_0 = 0,2593$; $A_1 = 0,8724$; $A_2 = -0,1336$; $I_\lambda(0, 0) = 40,3 \times 10^{12} \text{ W m}^{-2} \text{ m}^{-1}$.

- Utilizando el resultado del ejercicio 2.2 como se expresa S_λ en términos de las cantidades $A_0, A_1, A_2, I_\lambda(0, 0)$.
- Asumiendo equilibrio termodinámico local, $S_\lambda(\tau_\lambda) = B_\lambda[T(\tau_\lambda)]$, calcular $T(\tau_\lambda)$ y elaborar una gráfica de la misma. Asuma

$$B_\lambda = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(hc/kT\lambda) - 1}$$

- 2.5 En la superficie solar (asuma $T = 5770\text{K}$), donde la presión electrónica es de $1,5 \text{ N/m}^2$, existe un átomo de Calcio por cada 500 000 átomos de hidrógeno. Demostrar que la intensidad de las líneas de absorción debidas al hidrógeno en el primer estado excitado (líneas de Balmer) es unas 400 veces inferior a aquellas debidas al calcio una vez ionizado (líneas H y K de CaII). Para tal fin siga detenidamente el siguiente procedimiento :

- Calcular utilizando las ecuaciones de Boltzman y Saha el número de átomos de hidrógeno en el primer estado excitado ($n = 2$),

$$\frac{N_2}{N_{tot}} = \left(\frac{N_2/N_1}{1 + N_2/N_1} \right) \left(\frac{1}{1 + N_{II}/N_I} \right)$$

asuma para la función de partición $Z_I = 2$ y $Z_{II} = 1$.

- Utilice la ecuación de Saha para calcular $[N_{II}/N_I]_{Ca}$, el número relativo de átomos de Ca en el segundo estado de ionización (una vez ionizados) respecto al número de átomos de calcio en el primer estado de ionización (neutros), asumiendo $Z_I = 1,32$ y $Z_{II} = 2,30$ valores que fueron consultados en una tabla, y χ_I (primera energía de ionización del calcio) = $6,11eV$.
- Utilizando la ecuación de Boltzman calcular $[N_2/N_1]_{CaII}$, el número relativo de iones $CaII$ en el primer estado excitado respecto al número de iones en el estado base. Asuma, que el estado base está caracterizado por una energía E_1 y un grado de degeneración $g_1 = 2$, y el primer estado excitado tiene $E_2 = E_1 + 3,12eV$ y $g_2 = 4$.
- Calcular $[N_1/N_{tot}]_{CaII}$.
- Comparar, por cada 500 000 átomos de hidrógeno, el número de átomos de Calcio una vez ionizado en el estado base y el de átomos de hidrógeno en el primer estado excitado. Dicha relación, se supone provee una idea de la intensidad relativa de las líneas producidas por dichos átomos (H, K y líneas de Balmer respectivamente).

