

Capítulo 3

El Interior Estelar

3.1 Introducción

Como vimos en el capítulo anterior toda la radiación electromagnética que recibimos de las estrellas — y de la cual obtenemos el 99% de la información de que disponemos sobre ellas — proviene de lo que conocemos como su atmósfera. Dicha radiación nos permite construir directamente modelos completos de esta región de la estrella, pero, ¿qué sabemos acerca de lo que pasa en su interior ?.

A pesar de las limitaciones, el intelecto humano ha a travessado la barrera impenetrable de la superficie estelar y le ha echado un vistazo a lo que ocurre en el interior de las estrellas. En el capítulo que ahora comenzamos, realizaremos un viaje intelectual al interior de las estrellas, utilizando como herramienta fundamental las leyes de la física y la información que desde el exterior (única región visible de la misma) se puede deducir sobre lo que acontece en el interior.

Obtendremos de esta manera una visión global de la concepción de la astrofísica contemporánea sobre la fisiología de las estrellas, visión que parece estar en entero acuerdo con las observaciones realizadas de su atmósfera sobre la que se manifiestan los efectos de los eventos interiores.

3.2 Primeras observaciones y supuestos

Algunas observaciones primarias permiten obtener las primeras pistas para la comprensión de lo que ocurre en el interior de las estrellas.

Sabemos que toda estrella está formada por la reunión de una ingente cantidad de materia en estado gaseoso; sobre este hecho nos hablan las temperaturas y presiones registradas en las atmósferas estelares, condiciones en las que ningún material podría adoptar un estado distinto. Esta materia forma un sistema autogravitante que adopta por economía la forma esférica, distorsionada sólo cuando otras fuerzas (fuerza centrífuga debida a una rápida rotación o la cercanía de un objeto con un campo gravitacional intenso) así lo

determinan.

Por toda la estrella se propaga energía en forma de radiación que logra ser emitida desde la superficie para llegar hasta nuestros instrumentos. Estudiando dicha radiación podemos observar dos hechos fundamentales : la mayoría las estrellas no cambia apreciablemente de luminosidad, por lo menos en períodos de tiempo comparables a la historia de la humanidad (para la mayoría de las estrellas visibles en el cielo) e incluso en el tiempo que lleva la vida en la Tierra (para el caso de nuestro Sol que se revela como una estrella relativamente normal¹). Las estrellas parecen también conservar temperaturas superficiales constantes en períodos de tiempo similares (piénsese en el hecho de que la estrella Antares, la más brillante de la constelación del escorpión, debe su nombre a su particular color rojizo, que aún conserva dos mil años después de ser bautizada).

Estas sencillas observaciones nos permiten llegar a dos conclusiones generales de vital importancia en el estudio del interior estelar :

- Recuérdese que el radio de una estrella está directamente relacionado con su luminosidad y temperatura efectiva ; si estas dos últimas características no cambian como lo demuestra nuestros razonamientos anteriores el radio de la estrella tampoco lo hará . A esta situación se la conoce como el equilibrio mecánico de la estrella.
- A pesar de emitir constantemente ingentes cantidades de energía la estrella no reduce su temperatura superficial. Esto implica la existencia de una fuente de energía interior que está reponiendo constantemente la perdida. Esta corresponde a la denominada situación de equilibrio térmico.

La consideración detallada del estado de equilibrio de las estrellas nos brindará las primeras herramientas para una descripción más completa de su interior.

3.3 Equilibrio Hidrostático

Expresemos matemáticamente la condición mencionada de equilibrio mecánico que en esta sección llamaremos en general Equilibrio Hidrostático. Para ello consideremos un elemento de volumen de nuestra estrella (ver figura 3.1). Sobre dicho elemento consideramos el efecto de 3 fuerzas no nulas dirigidas en dirección radial : la atracción gravitacional que ejerce el material interior (F_g), la presión ejercida por el fluido que constituye la estrella y que actúa sobre la cara exterior de la misma (F_{ext}) y aquella que actúa sobre la cara interior (F_{int}). La segunda ley de Newton escrita para el caso considerado tiene la forma

$$dm \frac{d^2 r}{dt^2} = -F_g + F_{int} - F_{ext}$$

¹Se tiene claro que la vida hizo su aparición en la superficie del planeta hace alrededor de 3 800 millones de años. Los primeros organismos que utilizaron la fotosíntesis para sintetizar sus alimentos, aparecieron en ese entonces. Se puede mostrar que para mantener este tipo de seres vivos que dependen enteramente del Sol, se requiere que este último halla brillado con la misma intensidad desde entonces.

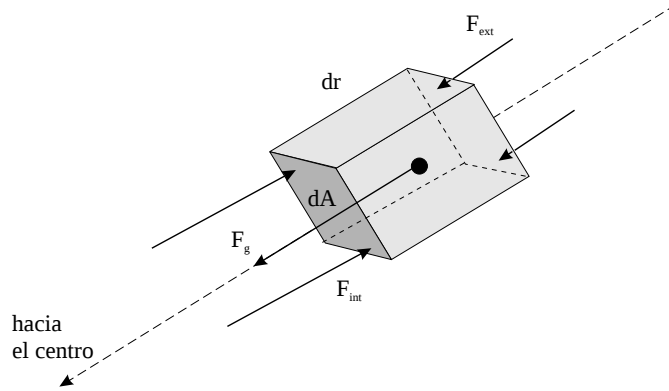


Figura 3.1: Un elemento de volumen de la estrella en equilibrio hidrostático.

por la condición de equilibrio hidrostático, que implica el reposo del diferencial de volumen, podemos escribir la anterior ecuación en la forma,

$$\frac{GM_r dm}{r^2} = (P_{int} - P_{ext}) dA$$

donde M_r recibe el nombre de *masa contenida* y como su nombre lo indica es la masa interior a la esfera imaginaria de radio r . Las fuerzas debidas a la presión se han escrito en la forma regular *Presión* $\times$ *Area*. Dado el espesor diferencial del elemento de volumen considerado podemos escribir $P_{ext} = P_{int} + dP$.

La masa del elemento de volumen puede escribirse en la forma $dm = \rho(r) dA dr$, con lo que la condición de equilibrio hidrostático se reduce a,

$$-\frac{GM_r \rho(r) dA dr}{r^2} = dP dA$$

En la expresión anterior podemos apreciar que el cambio en la presión debido a un cambio dr de la posición al interior de la estrella es negativo, por lo que concluimos que al interior de la estrella la condición de equilibrio hidrostático implica que la presión aumenta hacia el centro.

La forma final que adopta la ecuación de equilibrio hidrostático es,

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r \rho(r)}{r^2} \quad (3.1)$$

Una integración de esta ecuación puede proveernos el valor de la presión a cualquier profundidad en la estrella, lo que representa información de valor sin igual para conocer la estructura mecánica de la misma. Dicha integración sine mbargo exige el conocimiento de las funciones desconocidas M_r y $\rho(r)$. ¿Cómo determinar estas últimas ?.

La condición de conservación de la masa al interior de la estrella nos da los medios para determinar la masa contenida M_r .

Imaginemos un punto situado a una distancia r del centro de nuestra estrella y que siente el efecto gravitacional de la masa contenida M_r correspondiente. Si realizamos un pequeño desplazamiento dr en dirección radial dejaremos atrás un cascarón esférico cuya masa se agregará a la existente previamente. Desde la nueva posición $r + dr$ percibiremos una masa $M_r + dM_r$ donde,

$$dM_r = 4\pi r^2 \rho(r) dr$$

Por integración se obtiene,

$$M_r = 4\pi \int_0^r \rho(r) r^2 dr \quad (3.2)$$

La integración anterior, sin embargo, sólo es realizable si se conoce la forma explícita de la función $\rho(r)$. Concluimos pues que la función $\rho(r)$ juega un papel fundamental si queremos conocer la estructura mecánica de la estrella. ¿Cómo determinar esta importante función ?.

El estudio de la materia en sus diversos estados de agregación nos ha enseñado que existe generalmente una relación directa entre la presión en el seno de un cuerpo y la densidad del mismo. Dicha relación, que puede llegar a ser muy complicada para estados de agregación complejos, tiene una forma bastante simple en el caso de los gases ideales. En esta situación, análisis provenientes de la física estadística permiten escribir la relación,

$$P = nkT$$

donde n es la densidad numérica de partículas (átomos, moléculas, iones, electrones, etc) en el gas, k es la constante de Boltzmann y T es la temperatura del mismo. A su vez n está relacionado con la densidad de masa del gas por la relación,

$$n = \frac{\rho}{\bar{m}}$$

donde $\bar{m}$ es la masa media de las partículas, que puede a su vez escribirse como, $\bar{m} = \mu m_H$. El parámetro μ recibe el nombre de peso molecular promedio.

Con estas redefiniciones la ecuación de estado de los gases ideales queda,

$$P = \frac{\rho k T}{\mu m_H} \quad (3.3)$$

Los modelos más generales utilizados para estudiar el interior estelar suponen válida la ecuación de estado escrita para la descripción de los plasmas que constituyen la estrella misma. Modelos más completos y precisos asumen formas distintas de la ecuación de estado sobre todo en lo que respecta a los más densos plasmas cercanos al centro de la estrella ; de estas situaciones específicas no nos ocuparemos en nuestra simplificada descripción.

Una parámetro de importancia decisiva hace su aparición en esta parte de nuestra discusión : el peso molecular promedio, μ . Dado el estado de altísima ionización de los plasmas involucrados en las estrellas el peso molecular promedio difiere considerablemente del que podría determinarse considerando sólo el peso atómico de los iones : la presencia de electrones libres, muy livianos comparativamente, introduce el cambio descrito.

Consideremos un gas formado por átomos neutros de diversas especies. La masa promedio de las partículas del gas estará dada por

$$\bar{m}_n = \frac{\sum_j N_j m_j}{\sum_j N_j}$$

donde el subíndice n hace relación a la naturaleza neutra del gas. El índice j corre sobre todas las especies atómicas con mas m_j y que se encuentran en número N_j . Por la definición $\mu = \bar{m}/m_H$, se obtiene ,

$$\mu_n = \frac{\sum_j N_j (m_j/m_H)}{\sum_j N_j}$$

m_j/m_H es precisamente el número de masa A_j correspondiente a la especie atómica respectiva. Por una sencilla manipulación algebraica se puede escribir,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_n} &= \sum_j \frac{N_j}{\sum_j N_j A_j} \\ \frac{1}{\mu_n} &= \sum_j \frac{\frac{N_j}{N_j A_j} N_j A_j}{\sum_k N_k A_k} \\ \frac{1}{\mu_n} &= \sum_j \frac{1}{A_j} X_j \end{aligned}$$

los nuevos parámetros X_j reciben el nombre de *fracciones de masa*, y por definición representan la fracción total de la masa del gas que está en la forma de la especie atómica considerada. Así por ejemplo el 70% de la masa de un gas está en la forma de una especie atómica k cuya fracción de masa está dada por $X_k = 0,7$.

Como vimos en capítulos anteriores se puede decir que el universo está principalmente hecho de Hidrógeno y Helio con algunas trazas de elementos más pesados. Por esta razón son de frecuente uso las fracciones de masa de estas especies atómicas : X para el hidrógeno, Y para el Helio y Z para la suma de los elementos más pesados que este último, que en este contexto reciben el nombre de metales. En términos de estas fracciones de masa estandarés, la última expresión puede escribirse en la forma,

$$\frac{1}{\mu_n} \approx X + \frac{1}{4}Y + \frac{1}{\bar{A}}Z$$

donde $\bar{A}$ es el número de masa promedio de los metales considerados, que para la mayoría de las aplicaciones astrofísicas se asume como $\bar{A} = 15,5$.

Para el caso de un plasma con un alto grado de ionización (que corresponde al estado que nos interesa) la situación es ligeramente distinta. Aquí la masa promedio de las partículas se escribe

$$\bar{m}_i = \frac{\sum_j N_j m_j}{\sum_j N_j + N_j Z_j}$$

En el numerador se ha despreciado la masa muy pequeña de los electrones que andan libres, que sin embargo se consideran en el conteo del denominador, en el que se supuso ionización total: cada especie atómica contribuye con todos sus Z_j electrones. Por un razonamiento similar al anterior se puede mostrar que,

$$\frac{1}{\mu_i} = \sum_j \frac{1 + Z_j}{A_j} X_j$$

Considerando las fracciones de masa estandares X, Y, Z y suponiendo en general que en promedio para los átomos más pesados que el Helio el número de electrones (o protones en el núcleo) es aproximadamente la mitad del número total de núcleones A , podemos finalmente escribir por la anterior ecuación,

$$\frac{1}{\mu_i} = 2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}Z$$

Ejemplo 1

Con una composición química caracterizada por los valores $X = 0,70$ $Y = 0,28$ y $Z = 0,02$ (esta es la composición química solar) determinar el peso molecular promedio de a) materia con dicha composición química con átomos en estado neutro (nube de hidrógeno neutro en medio interestelar). b) materia con la composición química supuesta pero formada por iones completamente desnudos (el interior solar).

Solución

a. En este caso utilizamos

$$\frac{1}{\mu_n} \approx X + \frac{1}{4}Y + \frac{1}{15,5}Z$$

el resultado es, $\mu =$

b. Utilizando,

$$\frac{1}{\mu_i} = 2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}Z$$

encontramos $\mu = 0,62$

La relación entre la Presión y la densidad de la materia estelar implicada en la ecuación de estado, la ecuación de equilibrio hidrostático y la ecuación de conservación de la masa, permiten determinar el valor de todas las cantidades involucradas en ellas a cualquier profundidad en la estrella. Sin embargo un obstáculo se pone de nuevo en el camino : la temperatura.

El problema de la determinación de la temperatura a cualquier profundidad en la estrella será considerado más adelante en la sección correspondiente al transporte de energía en la estrella.

Por ahora nos ocuparemos de estudiar brevemente las condiciones que introduce sobre las variables de estado la segunda condición de equilibrio : el equilibrio térmico o radiativo.

3.4 Equilibrio térmico o radiativo

Para considerar el problema del equilibrio térmico o radiativo al interior de la estrella imaginemos encontrarnos situados a una distancia r del centro de la estrella. Sobre la superficie de la esfera de radio r sobre la que nos encontramos fluye radiación en todas direcciones pero consideraremos sólo aquella que va radialmente hacia afuera desde dicha superficie imaginaria. Sea L la cantidad total de energía que fluye hacia afuera por unidad de tiempo a través de toda la esfera considerada. Imaginemos ahora que nos desplazamos a una superficie vecina más exterior de radio $r + dr$. En su camino hasta allí la radiación es absorbida y reemitida por la materia en su camino. La condición de equilibrio térmico establece que la energía que sea absorbida por la materia le sea completamente repuesta a la radiación ; en estas condiciones la cantidad de energía total $L + dL$ que atravesaría la nueva superficie por unidad de tiempo sería idéntica a la anterior de modo que la condición de equilibrio térmico se puede escribir de la forma,

$$dL = 0$$

¿ Qué pasa si la materia además de la energía de movimiento que posee y que debe permanecer constante para satisfacer la condición de equilibrio térmico, posee además otro tipo de energía que puede liberar espontáneamente ?. Cómo la materia debe conservar su temperatura, dicha energía no puede ser retenida y acumulada sino que es entregada a la radiación que la atraviesa quien la transporta hacia afuera para conservar el equilibrio. En estas condiciones, producción de energía por la materia, la condición de equilibrio térmico se escribe en la forma,

$$dL = \epsilon dm$$

donde ϵ es la cantidad de energía producida por la unidad de masa en la unidad de tiempo y recibe el nombre de *rata de producción de energía*. Para la geometría considerada en la anterior descripción la ecuación de equilibrio térmico se escribe en la forma más adecuada,

$$dL = \epsilon \rho(r) 4\pi r^2 dr$$

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \epsilon \quad (3.4)$$

Es fácil ver que la consideración de la situación en la que la materia produce por si sola energía no responde solamente a una necesidad de hacer más general 3.4 sino que además es una condición necesaria para que la estrella sea lo que es : una fuente constante de radiación que no se enfría .

Si supusiéramos que la materia de la estrella no produce en absoluto ninguna energía, obviamente distinta de la que puede producir en virtud de su agitación térmica, es decir si tomamos $\epsilon = 0$ para cualquier r entonces $dL/dr = 0$ y nos enfrentaríamos a la siguiente situación : Por razones obvias $L(0) = 0$ y por la ecuación de equilibrio térmico debe serlo para otros r distintos de 0, esto es la estrella no emitiría absolutamente nada de radiación sin enfriarse.

Las estrellas, pues, necesitan una fuente de energía, distinta del calor de la materia que las constituye, para poder mantenerse encendidas. Pero, ¿ qué fuente de energía es esa ?. En la proxima sección exploraremos el problema del origen de la energía estelar, uno de los más grandes retos científicos de la historia.

3.5 La Fuente de Energía de las Estrellas

La respuesta a la pregunta cuál es el proceso que produce la energía que alimenta el voraz horno estelar representa uno de los grandes logros de la astrofísica de nuestro siglo.

Preguntémonos, como lo hicieron los astrofísicos del principio de esta centuria, qué proceso puede liberar la energía necesaria para mantener encendida una estrella por lo menos miles de millones de años, como sabemos lo ha hecho nuestro Sol . Las posibilidades no son muchas.

Existen en general 3 procesos posibles por los cuales se puede extraer energía de la materia. Analicemos en algún detalle cada uno de ellos.

Por un lado encontramos la denominada energía química. Este es el tipo de energía que utiliza mi cerebro para mantenerme escribiendo estas líneas y la misma que hace mover los pistones de los automóviles y otras máquinas. Consiste en la liberación de la energía encerrada en los enlaces químicos que se establecen entre los átomos o grupos de átomos que constituyen las moléculas de una sustancia. Así por ejemplo la energía que produce la llama de una vela es liberada cuando son rotos y formados enlaces químicos en reacciones que tienen lugar en los gases que la forman. ¿ Podrán procesos como estos explicar la energía emitida por las estrellas ?. ¿ Estarán las estrellas constituidas de algún tipo de sustancia química que al reaccionar con otra libera la energía que se convierte en el calor y radiación que baña el planeta desde el principio mismo de la vida ?. Varios argumentos descartan de tajo esta posibilidad.

El primero y más obvio de ellos, se puede encontrar pensando en el estado en el que se encuentran los átomos que constituyen las estrellas : como sabemos las altas temperaturas, que superan típicamente los 10 000 grados, hacen que se rompan los vínculos entre por

lo menos los electrones exteriores de dichos átomos y el corazón del mismo (núcleo + electrones interiores). Sin los electrones ligados y con las energías medias involucradas en las colisiones entre los iones es casi imposible que se de cualquier tipo de proceso químico, dejando descartada de entrada la posibilidad considerada.

Otro argumento en contra de esta posibilidad, aun más elaborado y el primero históricamente, hace relación a la eficiencia energética de los procesos químicos. En promedio puede decirse que en una reacción química puede liberarse del orden de unos 100Kj/gr. La masa de combustible necesaria para producir los $3,8 \times 10^{23} KJ$ emitidos por el Sol cada segundo será por tanto igual $3,8 \times 10^{21} gr$. Si suponemos que el Sol está hecho enteramente del combustible considerado, sus $2 \times 10^{33} gr$ permitirían que brillara con la misma intensidad por un período de unos 16 000 años, lo que esta en entera contradicción con los registros arqueológicos, que ponen por ejemplo el origen de las primeras civilizaciones, que vieron obviamente el mismo Sol que conocemos, hace 40 000 años.

Otra de las fuentes de energía que fue considerada por los estudiosos del problema procedía de un mecanismo común en muchos procesos astrofísicos : el colapso gravitacional.

Todo sistema de partículas autogravitante tiene asociada una energía potencial gravitacional y una energía cinética total resultante de la suma de energía cinética de las partículas individuales.

La energía potencial de un cuerpo con simetría esférica de radio R está dada por,

$$U = -4\pi G \int_0^R M_r \rho r dr$$

Si asumimos la situación de un cuerpo homogéneo (densidad constante) e integramos obtenemos,

$$U = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$$

Vemos pues cómo la energía potencial gravitacional depende del inverso del tamaño del objeto considerado, y un cambio en dicho tamaño conducirá a su vez a una cambio en la energía potencial del mismo. En particular cuando el cuerpo se hace más pequeño (colapsa), la energía potencial gravitacional disminuye. ¿ A dónde fue a parar el sobrante ?. Si consideramos al cuerpo aislado de cualquier cuerpo exterior debe concluirse, por la conservación de la energía que esta se ha convertido en energía cinética de las partículas que constituyen el cuerpo en cuestión ; podemos concluir así que un cuerpo que se contrae sin intercambiar energía con el medio sufre un calentamiento. Si ahora permitimos que el calor ganado por el colapso se convierta en radiación, llegamos al más interesante resultado de que un cuerpo que colapse emite radiación sin enfriarse.

¿ Pueden los procesos de colapso gravitacional explicar el origen de la energía de las estrellas ?, esto es, ¿ la energía que emiten las estrellas procede de la disminución constante de su tamaño ?.

Asumiendo un Sol homogéneo y que se ha contraído desde un tamaño muchísimo más grande que el actual hasta una tamaño similar al actual y a una rata tal que explique

la cantidad total de energía emitida por nuestra estrella un cálculo preciso muestra que el proceso tardaría solo unos 10 millones de años. Un período de vida como este para el Sol se contradice con los registros paleontológicos que datan en 65 millones de años la desaparición masiva de los dinosaurios y muchas otras especies animales y vegetales que conocieron seguramente el Sol tal y como lo vemos en el presente.

No nos queda otra salida : los procesos nucleares.

Los núcleos atómicos guardan una de las más enormes fuentes de energía disponibles en el universo. Ciertos procesos que involucran alteraciones de la estructura de los núcleos pueden liberar esa energía escondida en ellos. El descubrimiento del tipo de procesos que permiten realizar ese aprovechamiento del potencial disponible en el núcleo de los átomos ha representado una de las más grandes revoluciones en el campo de la generación de energía controlada (y descontrolada también) en toda la historia de la humanidad, y para nosotros representará como lo veremos a continuación la solución al dilema del origen de la energía estelar.

¿ De qué modo preciso puede extraerse energía de un núcleo atómico ?.

Una de los más sorprendentes consecuencias del famoso resultado de la relatividad especial resumido en la fórmula $E = mc^2$ es el de que los sistemas ligados poseen una masa inferior a la suma de la de sus partes. Este defecto de masa se produce por la pérdida de energía que sufre el sistema cuando se está formando. Piénsese por ejemplo en el proceso de formación de un átomo de Hidrógeno apartir de un protón y un electrón que da lugar a la producción de fotones que escapan del sistema. La aproximación del electrón al protón se produciría por un salto entre niveles discretos de energía precisa. Al final del proceso el átomo de Hidrógeno formado tendrá una masa igual a la suma de la masa del electrón y el protón, menos la correspondiente a la energía liberada por la radiación. Esta última energía tendrá un equivalente másico tan pequeño que no podríamos notarlo y el químico seguiría utilizando para computar la masa de cualquier átomo la suma de las masas individuales de sus constituyentes.

Cuando se trata de calcular la masa de un núcleo atómico la situación es enteramente diferente. La energía liberada ahora en el proceso de formación es tan grande que su equivalente másico puede ser importante respecto a la masa de los constituyentes del sistema, protones y neutrones, y dicha pérdida debe por tanto ser tomada en cuenta.

La masa de un núcleo atómico que contiene Z protones y N neutrones ($A = N+Z$) es por tanto,

$$M({}_Z^AX_N) = Zm_p + Nm_n - B/c^2$$

B es precisamente la energía que se liberaría durante un hipotético proceso de formación por la unión una a una de las partículas que forman el núcleo y recibe el nombre de *Energía de Enlace Nuclear*.

Dos son los posibles procesos con los que puede verse alterada considerablemente la estructura de un núcleo atómico : la fisión y la fusión. En la primera un núcleo atómico pesado, se escinde en dos o más núcleos livianos. El segundo proceso, la fusión, como su

nombre lo indica implica la conformación de un núcleo atómico mediante la unión de dos previamente existentes.

La realización del proceso de fusión de dos núcleos atómicos está sometida a una serie de condiciones mínimas. Una de ellas y quizá la más importante radica en el hecho de que los protones que los constituyen se repelen mutuamente y para fundir los núcleos las condiciones en una colisión deben estar dadas para que dicha repulsión sea superada permitiendo a los núcleos acercarse lo suficiente para que empiece a actuar la fuerza nuclear fuerte, la que una vez en escena podría completar el proceso de unión. Propongámonos, primero desde un punto de vista clásico, preguntarnos las condiciones para que un par de núcleos que se acercan frontalmente logren superar su mutua repulsión electrostática.

Ubiquemos nuestro referencial en el centro de masa del sistema, es decir cambiemos la situación por la de una partícula puntual de carga Z_1 igual a la de uno de los núcleo y cuya masa es $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$, que se acerca a un centro dispersor con carga Z_2 y de masa infinita. La energía potencial de la partícula μ es a grandes distancias del centro dispersor igual a la energía potencial electrostática clásica,

$$U_e = + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

A una distancia inferior al radio nuclear (asumimos aproximadamente igual el radio de los dos núcleos, $r_N \approx 10^{-15}m$), la repulsión electrostática perderá su importancia frente a la potentísima atracción fuerte. La energía potencial en dicha región en virtud de esta interacción se asume por comodidad constante y obviamente negativa. La forma total del potencial se presenta en la figura 3.2.

La condición mínima para que se de el proceso de formación del nuevo núcleo es, en términos de lo anterior, que la energía total de la partícula *reducida*, que en el infinito es puramente cinética, coincida o sea mayor que el valor de la repulsión electrostática justo en $r = r_N$, esto es,

$$K_{min} = \frac{1}{2} \mu v_{fusion}^2 = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 r_N}$$

cualquier partícula con una velocidad inferior a v_{fusion} se aproximara al centro dispersor y se detendrá completamente antes de alcanzar la región de acción de la fuerza fuerte, para posteriormente retornar por el camino por el que vino ; no habra fusión en este caso. Si suponemos un medio regular sometido a la estadística de Maxwell-Boltzmann la anterior condición se convertira en una condición sobre la temperatura en la forma,

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} k T_{min} &= \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 r_N} \\ T_{min} &= \frac{2 Z_1 Z_2 e^2}{12\pi\epsilon_0 k r_N} \end{aligned} \quad (3.5)$$

de modo que por razonamientos clásicos podemos decir que la temperatura mínima para que ocurra una reacción de fusión que involucre núcleos de Hidrógeno ($Z_1 = Z_2 = 1$) es,

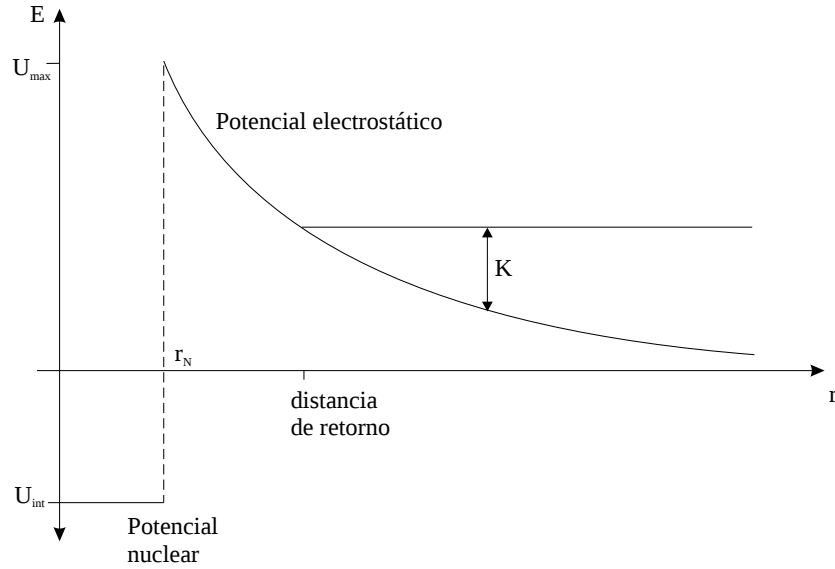


Figura 3.2: Potencial propuesto para el núcleo dispersor.

$$T_{min} = 11 \times 10^9 \text{K}$$

¿se cumple esta exigente condición en el centro de las estrellas?.

Un sencillo cálculo permite estimar el valor de la temperatura nuclear de una estrella cualquiera para corroborar si es posible que procesos de fusión nuclear tengan lugar allí. Partamos de la ecuación de equilibrio hidrostático,

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r \rho(r)}{r^2}$$

Si suponemos la densidad constante e igual a $\rho = \bar{\rho} = M/4\pi R^3$, podemos integrar la ecuación de conservación de la masa, para calcular punto a punto el valor de la masa contenida en función del radio, así ,

$$M_r = 4\pi \int_0^r \rho(r) r^2 dr$$

$$M_r = M \frac{r^3}{R^3}$$

Introduciendo este resultado en la ecuación de equilibrio hidrostático e integrando para calcular el valor de la presión central de la estrella, asumiendo un valor superficial de $P = 0$ para esta cantidad, se obtiene

$$0 - P_c = -G\bar{\rho}M \int_0^R \frac{r^3/R^3}{r^2}$$

$$P_c = \frac{3GM^2}{4\pi R^4}$$

Introduciendo los valores correspondiente al Sol, una estrella típica no muy grande, obtenemos el resultado numérico,

$$P_{c\odot} = 2,7 \times 10^{14} \text{ N m}^{-2} = 2,7 \times 10^9 \text{ Atm}$$

Podemos ahora utilizar la ecuación de estado para calcular apartir de la densidad supuesta y la presión estimada, la temperatura del núcleo solar,

$$T_c = \frac{4\pi\mu m_H P_c R^3}{3Mk}$$

Asumiendo el valor de μ correspondiente a materia con la composición de la materia solar y completamente ionizada, como fue calculado en el ejemplo 1 de la sección, encontramos finalmente,

$$T_{c\odot} = 14,3 \times 10^6 \text{ K}$$

habiamos sinembargo obtenido una temperatura mínima del orden de decenas de miles de millones de grados para que ocurran reacciones de fusión del hidrógeno en el interior solar, y nuestro anterior estimativo de la temperatura central, que representa una buena aproximación al valor determinado por métodos más precisos, cae sustancialmente por debajo de este umbral. ¿ No pueden, entonces, ocurrir reacciones de fusión nuclear en el interior de las estrellas ?, esto nos deja entre manos un grave problema, si no son los eficientísimos procesos nucleares los que alimentan el horno estelar, ¿ qué puede ser entonces ?.

Antes de abandonar el examen de los procesos nucleares como fuentes de la energía estelar, debemos reconocer un aspecto fundamental de nuestra anterior argumentación : cuando calculamos el valor mínimo de la temperatura, necesario para que los núcleos tengan las velocidades que les permitan superar las barreras de potencial electrostático que los separan, utilizamos argumentos enteramente clásicos. ¿ Cómo cambia nuestro resultado cuando introducimos elementos del comportamiento cuántico de los núcleos en colisión ?. examinemos esta posibilidad.

Un cálculo preciso del proceso de colisión implicaría por ejemplo la utilización de la ecuación de Schrodinger para determinar el valor de la función de onda de la partícula reducida en presencia del potencial de la figura 3.2. En la gráfica de la figura 3.3 se hace una representación aproximada del resultado de un análisis como este. Como puede observarse allí cuando evaluamos la probabilidad de encontrar al núcleo en algún lugar del espacio, existe una probabilidad distinta de 0 de que se lo encuentre más alla de la barrera en $r = r_N$, aun sin tener desde el punto de vista clásico la energía suficiente para superar dicha barrera. Es como si el núcleo atómico pudiera atravesar la barrera de potencial a traves de un túnel, sin necesidad de llegar a la cima de la misma. Este conocidísimo y paradójico comportamiento cuántico es conocido precisamente como el *efecto túnel* y fue

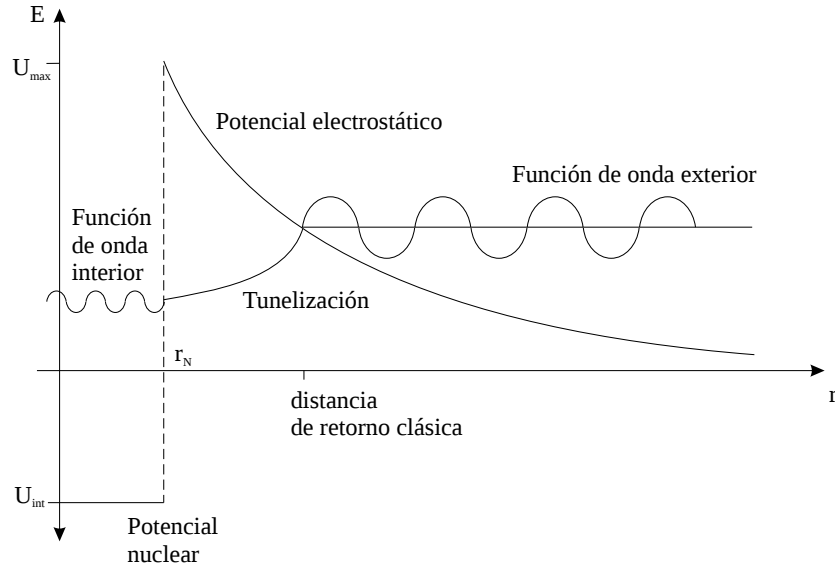


Figura 3.3: Forma general de la función de onda de una partícula puntual de carga Z_2 en el potencial típico de una colisión nuclear.

por primera vez propuesto por George Gamow como solución al problema de la producción de energía en la estrella por los procesos de fusión.

Podemos hacer un sencillo cálculo (no el preciso que implicaría resolver la ecuación de Schrodinger), para estimar cual es ahora el valor mínimo de la temperatura en un plasma para que tenga lugar el proceso de fusión de dos núcleos.

Toda partícula cuántica tiene asociada una onda cuya longitud está relacionada con su momentum lineal (una propiedad corpuscular), por la hipótesis de De Broglie, mediante la expresión,

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

λ cuantifica de alguna manera la dimensión de la región del espacio en la que puede ser encontrada la partícula en cuestión.

Si consideramos ahora la partícula reducida de nuestro problema que se acerca al potencial dispersor podemos pensar que incluso antes de situarse a una distancia muy pequeña del centro dispersor la probabilidad de que se encuentre en el interior de la barrera es distinta de cero y de súbito puede encontrarse allí aún sin contar con la energía necesaria para acercarse hasta $r = r_N$. Para que esto tenga lugar puede pensarse que la partícula debe tener una energía que la acerque a una distancia que es del orden de su longitud de De Broglie. Esta condición puede escribirse como,

$$\frac{1}{2}\mu v^2 = \frac{p^2}{2\mu} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_o\lambda}$$

Calculando el valor de λ que satisface la anterior igualdad, encontramos,

$$\lambda = \frac{4\pi\epsilon_o h^2}{2\mu Z_1 Z_2 e^2}$$

Por otro lado la temperatura necesaria para que las partículas tengan la velocidad justa para aproximarse a una distancia λ del centro dispersor está dada por 3.5,

$$T_{min} = \frac{2Z_1 Z_2 e^2}{12\pi\epsilon_o k\lambda}$$

sustituyendo el valor de λ encontrado hallamos finalmente,

$$T_{min} = \frac{4\mu Z_1 Z_2 e^4}{3(4\pi\epsilon_o)^2 k h^2}$$

Para la fusión del Hidrógeno ($\mu = m_H/2$) es necesaria una temperatura mínima estimada de,

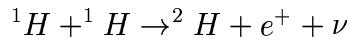
$$T_{min,H} = 9,7 \times 10^6 \text{ K}$$

que está en un entero acuerdo con la temperatura estimada para el núcleo solar.

El anterior razonamiento, demuestra pues, definitivamente, que es por lo menos posible que los procesos de fusión nuclear alimenten a las estrellas. La verificación definitiva y observacional de que es así nos la dará la detección de los neutrinos producidos durante los procesos de fusión, de los que hablaremos brevemente más adelante.

Una vez identificado el tipo de proceso que da lugar a la energía de las estrellas ocupémonos ahora de los detalles en lo que concierne a la manera como son fusionados los núcleos de hidrógeno (los más abundantes en la estrella) para liberar la energía necesaria para mantener la estrella encendida miles de millones de años.

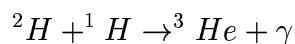
El más sencillo proceso de fusión que puede tener lugar en el interior de las estrellas es aquel en el que dos protones (núcleos del isótopo más liviano del Hidrógeno) se unen para formar un núcleo de deuterio. La reacción se puede escribir de la forma,



esta reacción libera una energía de $1,442 \text{ MeV}$ que se va en la forma de energía cinética del deuterio, el positrón y el neutrino. El neutrino (que en la reacción se lleva una energía máxima de $0,42 \text{ MeV}$), una partícula extremadamente elusiva, escapa rápidamente del Sol sin interactuar casi en absoluto con la materia que lo constituye, de modo que no realiza ningún aporte a la luminosidad final de nuestra estrella. Si supusiéramos que esta es la única reacción productora de energía en el interior solar, nos veríamos enfrentados con el problema de que la energía total que ella provee, en promedio unos $1,2 \text{ MeV}$, permitiría

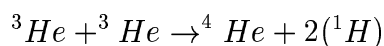
al Sol, mantener la misma luminosidad actual, consumiendo el 10% de su hidrógeno por un tiempo de apenas unos 1 000 millones de años, inferior incluso a la edad que tiene la vida sobre la Tierra.

Se puede sinembargo mostrar que una vez formado el deuterio por esta primera reacción, este puede fácilmente fusionarse con los abundantes protones disponibles en el medio mediante una reacción que está dada por,



la reacción anterior puede liberar un total de unos 5,5 MeV que se utilizan principalmente para formar el fotón γ . Con la energía que aporta esta reacción a los 1,2 MeV producidos en la anterior se consiguen unos 6,7 MeV, que aun son insuficientes para explicar la iluminación constante del Sol a lo largo de los últimos 5 000 millones de años. Es requerida pues la ocurrencia de otras reacciones que aporten aun más energía.

Una vez se ha formado 3He por la anterior reacción, la física nuclear permite la ocurrencia de un par de reacciones posibles, de las cuales la más probable (85% en las condiciones del núcleo solar) corresponde a aquella en la cual, este núcleo se fusiona con otro idéntico para formar uno nuevo del más abundante isótopo de Helio, así ,



esta reacción es altamente eficiente y en ella se puede liberar un total de unos 13 MeV. Hasta este punto la energía total liberada en las 3 reacciones descritas es en total de unos $2 \times (2MeV + 5,5) + 13MeV \approx 26MeV^2$. La energía total liberada por este ciclo de reacciones, en las que se convierten en total 4 núcleos de Hidrógeno en un núcleo de Helio, puede hacer brillar al Sol, con su luminosidad actual y consumiendo apenas el 10% del Hidrógeno disponible por un período de 10 mil millones de años, un tiempo de sobra para explicar la estabilidad solar en los últimos 5000 millones de años.

A este conjunto de reacciones se le da el nombre de *cadena protón-protón (cadena p-p)* y es ella la responsable por la producción de la mayor parte de la energía liberada por nuestro Sol.

Habíamos dicho que la reacción en la que el 3He se convierte directamente en 4He por la fusión con un núcleo idéntico ocurre el 85% de las veces. El 15% restante el 3He puede encontrar un núcleo de 4He para formar un núcleo de 7Be , que después de una serie conocida de reacciones conduce finalmente a la formación de un núcleo de 4He .

Existe pues una rama adicional de la cadena p-p que produciendo una energía similar a la producida por la rama principal, conduce exactamente al mismo resultado que esta última. Los detalles de las reacciones que forman las distintas ramas de la cadena p-p se presentan en la figura 3.4.

²El 2 que acompaña la suma de las energías de las primeras dos reacciones se debe al hecho de que son necesarios 2 núcleos de 3He para realizar la última reacción, núcleos que sólo son formado en ese par de reacciones

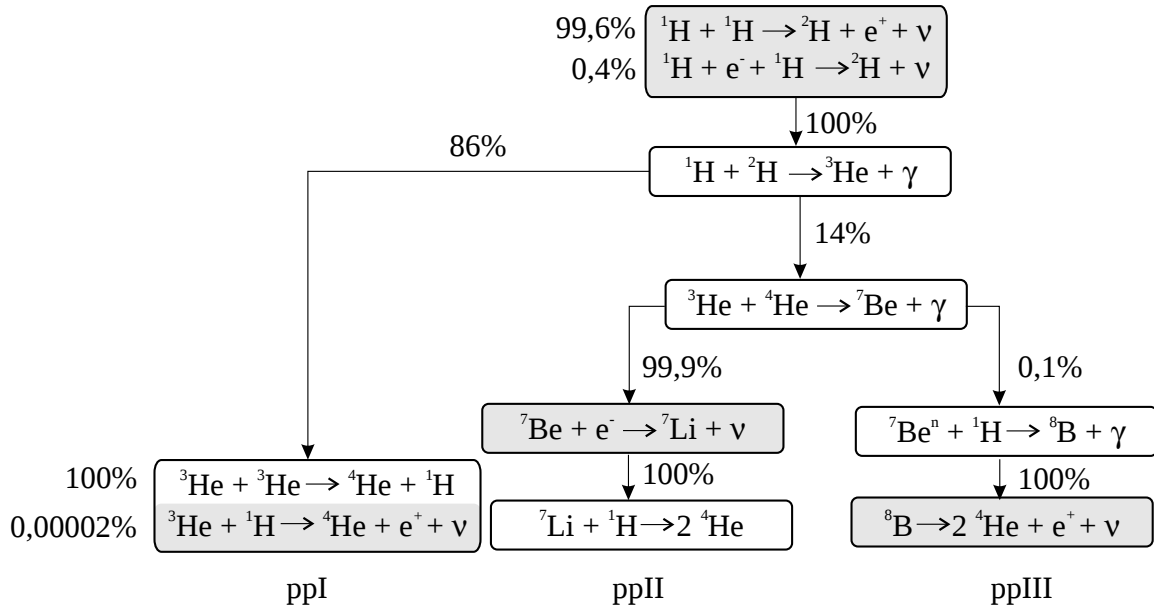


Figura 3.4: La cadena protón - protón y sus ramas.

Existe una serie distinta de reacciones nucleares que conducen también a la formación de ^4He a partir de 4 núcleos de Hidrógeno y en el que interviene a modo de catalizador un núcleo de ^{12}C . esta serie de reacciones, conocidas como el *ciclo CNO*, se presentan a temperaturas superiores a las correspondientes a la cadena protón-protón y como lo veremos en el capítulo siguiente parecen ser principalmente las que producen la energía de las estrellas más masivas que nuestro Sol. En la figura 3.5 se presentan los detalles de este ciclo de reacciones.

Recordemos pues que parte de lo que nos motivaba a estudiar el problema de la generación de la energía en el interior de las estrellas, era el encontrar la forma en la que dependía el parámetro ϵ que aparecía en la ecuación de equilibrio térmico (Ec. 3.4). Cálculos detallados basados en la física de las reacciones nucleares descritas permiten hallar dicha dependencia. El resultado es, para la cadena p-p,

$$\epsilon_{pp} = 2,38 \times 10^6 \rho X^2 (T_6)^{-2/3} \exp(-33,80 T_6^{-1/3}) \text{ j gr}^{-1} \text{ s}^{-1}$$

y para el ciclo CNO,

$$\epsilon_{CNO} = 8,67 \times 10^{23} \rho X^2 X_{CNO} (T_6)^{-2/3} \exp(-132,28 T_6^{-1/3}) \text{ j gr}^{-1} \text{ s}^{-1}$$

En estas expresiones, $T_6 = T/10^6 K$ y X_{CNO} representa la fracción de masa combinada de Carbono, Nitrógeno y Oxígeno, los principales elementos que intervienen en el ciclo CNO.

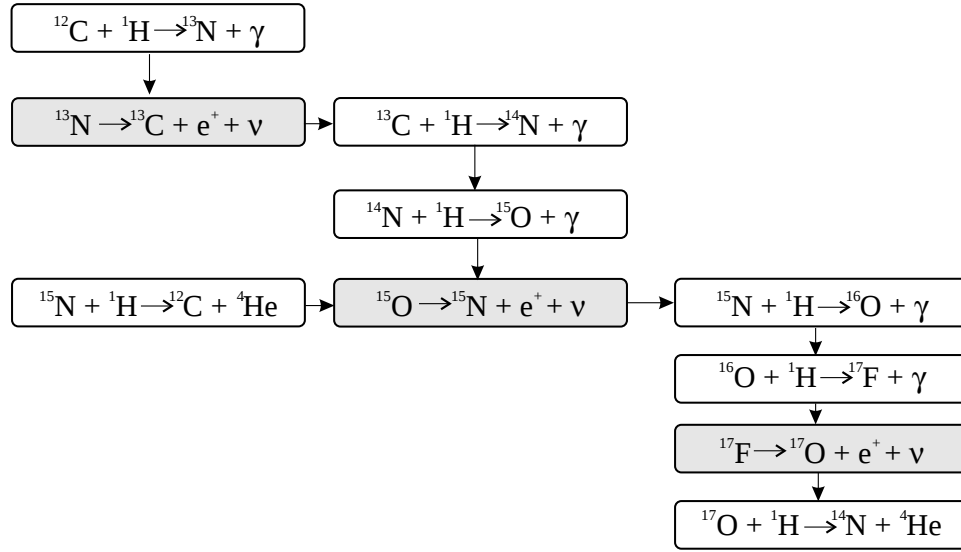


Figura 3.5: Las reacciones que constituyen el ciclo CNO.

En la mayoría de las distintas ecuaciones que describen el estado de la materia en el interior estelar que hemos encontrado hasta este punto (ecuación de equilibrio hidrostático, conservación de la masa, ecuación de equilibrio térmico) esta implícita de alguna manera la temperatura. Para completar el cuadro físico-matemático que hemos construido del interior estelar hace falta por tanto la formulación de una ecuación que describa la manera como varía en el interior de la estrella este ubicuo parámetro. En la próxima sección estudiaremos este problema.

3.6 Transporte de la energía en el interior estelar

Una vez producida la energía en los procesos nucleares en el centro de las estrellas, ¿cómo es llevada esa energía hasta la superficie donde es radiada al exterior?. Dedicaremos esta sección a dar respuesta a esa pregunta.

Existen fundamentalmente 3 procesos de transporte de energía en la materia : conducción, radiación y convección.

El transporte por conducción es aquel en el que la energía es llevada de un lugar a otro en un cuerpo por medio de las colisiones entre las partículas del medio. Este tipo de transporte es común en materia en estado sólido o en otros altamente densos.

El transporte por radiación tiene lugar cuando el camino libre medio de los fotones supera el correspondiente a las partículas del medio, de modo que antes de que la energía sea llevada de un lugar a otro vía colisiones, la radiación, con una mayor libertad de movimiento, realiza dicho trabajo. El transporte por radiación tiene lugar en medios

transparentes (una opacidad comparativamente baja).

Finalmente, la energía es transportada por convección, cuando inestabilidades mecánicas en el medio, provocan el movimiento de porciones completas de materia que se desplazan llevando calor de las regiones más calientes a las más frías. Este tipo de transporte tiene lugar en materia sometida a enormes gradientes de temperatura inducidos, por ejemplo, por una gran opacidad o por la muy desigual producción de energía en su interior.

En las estrellas normales comunmente la energía se transporta por los dos últimos mecanismos (radiación y convección) siendo la conducción un medio de transporte más bien propio de estrellas peculiares tales como enanas blancas.

Estudiemos ahora en algún detalle la manera como los distintos procesos de transporte distribuyen la energía en el interior de la estrella y las condiciones para que sea uno u otro el mecanismo que lleva a cabo dicha misión.

3.6.1 Transporte Radiativo

El problema del transporte por radiación fue más o menos bien estudiado por nosotros en la primera parte del capítulo 2. Allí introducimos lo que se conoce como la ecuación de transferencia radiativa, que, para una geometría simplificada, tiene la forma

$$\cos \theta \frac{dI_\lambda(\tau_\lambda, \theta)}{d\tau_\lambda} = I_\lambda(\tau_\lambda, \theta) - S_\lambda(\tau_\lambda)$$

Si multiplicamos la anterior ecuación por $\cos \theta$ e integramos sobre todas las direcciones y sobre todas las longitudes de onda, asumiendo que la opacidad es independiente de esta última, se encuentra,

$$\frac{d}{d\tau} \int_{4\pi} I \cos^2 \theta d\Omega = \int_{4\pi} I \cos \theta d\Omega = F \quad (3.6)$$

Donde F es el flujo radiativo bolométrico ; en equilibrio termodinámico local tenemos que

$$I = \int_0^\infty I_\lambda d\lambda = \int_0^\infty B_\lambda(T) d\lambda = \sigma T^4$$

con este cálculo 3.6 queda,

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{4\sigma}{3} T^4 \right) = F$$

Por la definición de profundidad óptica tenemos $d\tau = -\bar{\kappa} \rho dr$. Asumiendo simetría esférica se tiene además $F = L_r / 4\pi r^2$ de modo que la anterior ecuación se convierte en,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(\frac{4\sigma}{3} T^4 \right) &= -\bar{\kappa} \rho \frac{L_r}{4\pi r^2} \\ \frac{dT}{dr} &= -\frac{3}{4\sigma} \frac{\bar{\kappa} \rho}{T^3} \frac{L_r}{4\pi r^2} \end{aligned} \quad (3.7)$$

que finalmente da el gradiente de la temperatura como es determinado por el proceso de transporte radiativo.

3.6.2 Transporte Convectivo

Nos proponemos ahora a encontrar la manera como es determinado el gradiente de temperaturas en la región de una estrella donde el transporte de energía se realiza por convección. Debe aclararse que los procesos de convección en las estrellas son altísimamente complicados involucrando la solución de problemas hidrodinámicos que superan el nivel de esta presentación. Aquí solo pretendemos ofrecer una visión lo más general posible del proceso y de las condiciones para que se de. Un análisis más detallado del problema preciso de la convección se puede encontrar en los textos de referencia del capítulo.

Para comenzar imaginemos una porción de materia (una burbuja convectiva) que en cierta región de la estrella tiene una densidad levemente menor que la de su entorno, razón por la cual deberá ascender, en virtud del principio de Arquímedes.

Tomemos una porción infinitesimal, dr , de la trayectoria en ascenso de la burbuja. En el proceso imaginemos que ella se expande de forma adiabática y supongamos que la presión interior de la burbuja y la de su entorno son casi iguales.

Si queremos que la burbuja ascienda una distancia adecuada deberemos exigir que en su nueva posición la densidad siga siendo menor que la de su entorno. Pero al ascender en el medio la densidad del mismo va cayendo de modo natural y si queremos que se mantenga la desigualdad deberemos exigir que la materia en la burbuja reduzca su densidad a una rata mayor en valor absoluto, que la correspondiente a la materia del medio, es decir,

$$\frac{d\rho_B}{dr} < \frac{d\rho_M}{dr} \quad (3.8)$$

Tratemos ahora de expresar los gradientes de la densidad en el medio y en la burbuja que aparecen en la desigualdad anterior en términos de las variables de estado que caracterizan el entorno.

En ambos casos, tanto para la materia en el entorno, como para la materia en la burbuja, se satisface la relación entre las variables de estado expresada por la ecuación de estado, así,

$$P = \frac{\rho k T}{\mu m_H}$$

derivando respecto a r la anterior relación, obtenemos,

$$\frac{dP}{dr} = \frac{kT}{\mu m_H} \frac{d\rho}{dr} + \frac{\rho k}{\mu m_H} \frac{dT}{dr} \quad (3.9)$$

se ha asumido una composición química homogénea para la estrella, por la cual $\frac{d\mu}{dr} = 0$.

Esta relación nos permite directamente obtener para el medio una conexión entre el gradiente de la densidad y los correspondientes gradientes de presión y temperatura en el medio, así,

$$\frac{d\rho_M}{dr} = \frac{\rho_M}{P_M} \left[\frac{dP}{dr} - \frac{P_M}{T_M} \frac{dT_M}{dr} \right] \quad (3.10)$$

Por otro lado sabemos que la materia en la burbuja se expande adiabáticamente, de modo que su volumen y presión se relacionan de la forma,

$$PV^\gamma = H$$

donde γ recibe el nombre de coeficiente adiabático que para un gas monoatómico (es esta la situación a la que nos enfrentamos en un plasma formado por iones y electrones individuales) adopta el valor 5/3. H es una constante arbitraria. Asumiendo para la burbuja una densidad constante, podemos expresar el volumen en términos de la densidad y la masa $V = M/\rho$ lo que permite escribir,

$$P = \frac{H}{M^\gamma} \rho^\gamma \quad (3.11)$$

derivando respecto a r ,

$$\frac{dP}{dr} = \frac{H}{M^\gamma} \gamma \rho^{\gamma-1} \frac{d\rho}{dr}$$

De 3.11 se puede escribir H/M^γ en términos de la presión y la densidad, eliminando cualquier dependencia con estas desconocidas constantes. El gradiente de la densidad para la burbuja finalmente queda,

$$\frac{d\rho_B}{dr} = \frac{1}{\gamma} \frac{\rho_B}{P_B} \frac{dP_B}{dr} \quad (3.12)$$

Sustituyendo 3.10 y 3.12, en la desigualdad 3.8, obtenemos,

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\rho_B}{P_B} \frac{dP_B}{dr} < \frac{\rho_M}{P_M} \left[\frac{dP}{dr} - \frac{P_M}{T_M} \frac{dT_M}{dr} \right]$$

Asumiendo condiciones de equilibrio $P_B \approx P_M = P$, $T_B \approx T_M = T$, manipulaciones algebraicas en la anterior desigualdad conducen a,

$$\left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr} > \frac{dT}{dr} \quad (3.13)$$

Por un momento, volvamos a 3.9. Habíamos dicho que esta relación era satisfecha en general en un gas donde fuera válida la ecuación de estado escrita, en particular en el que constituye la burbuja. Si sustituimos en esta expresión el gradiente de densidades 3.12, calculado mediante la asunción de una expansión adiabática, obtenemos,

$$\frac{dP}{dr} = \frac{P}{\rho} \frac{1}{\gamma} \frac{\rho}{P} \frac{dP}{dr} + \frac{P}{T} \frac{dT}{dr}$$

$$\frac{dT}{dr} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr}$$

Esta última expresión recibe el nombre de gradiente de temperatura adiabático. Finalmente, la condición para que tenga lugar el transporte convectivo es por 3.13,

$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{ad} > \frac{dT}{dr}$$

Como es natural, en el interior de la estrella la temperatura decrece hacia afuera, i.e. $dT/dr < 0$, de modo que la anterior condición puede también escribirse en la forma,

$$\left| \frac{dT}{dr} \right| > \left| \frac{dT}{dr} \right|_{ad} \quad (3.14)$$

Vemos pues, como lo habíamos anunciado al principio de esta sección, que el transporte por convección está determinado por la magnitud de los gradientes de temperatura que se establezcan en una determinada región de la estrella: cuanto más grande sea el gradiente actual en la materia o menor el valor deducido para el gradiente adiabático, más probable es que la energía sea transportada por convección.

¿Qué tipo de fenómenos provocan esta clase de alteraciones en los gradientes de temperatura?

En virtud de 3.7 podemos suponer que en ciertas condiciones el gradiente de temperatura en una región de la estrella está directamente determinado por la opacidad de dicha región, de tal modo que regiones muy opacas tendrán enormes gradientes de temperatura induciendo la aparición de inestabilidades convectivas.

Por otro lado, se puede mostrar que,

$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{ad} = \frac{-g}{C_P}$$

donde g es la magnitud del campo gravitacional y C_P es el calor específico de la materia a presión constante. En regiones de la estrella donde g se haga pequeño (cerca al centro o en la atmósfera de estrellas gigantes) el valor local del gradiente adiabático de temperaturas se hará pequeño también, haciendo dicha región de la estrella sensible a desarrollar inestabilidades convectivas. El incremento de C_P es debido por ejemplo por la presencia de procesos de ionización, que incrementan la capacidad de la materia para ganar calor del medio (cerca a la superficie estelar), reducirá también el valor de $dT/dr|_{ad}$, permitiendo la aparición de inestabilidades convectivas.

Otro mecanismo que puede provocar la aparición de convección corresponde a la existencia de un enorme gradiente de las propiedades emisivas (cuantificadas por ϵ) de la materia estelar en la región de producción de energía. Este tipo de comportamiento aparece por

ejemplo cuando los procesos que producen energía son altamente sensibles al valor de la temperatura, es el caso por ejemplo del ciclo CNO, situaciones en las cuales regiones de la estrella muy cercanas en el espacio y cuyas temperaturas difieren poco se convierten en regiones de producción y no producción de energía, ocasionando la aparición de enormes gradientes de temperatura que inducen inestabilidades convectivas.

Por último existe una manera simplificada de expresar la condición 3.13.

Reescribiendo esta desigualdad en la forma,

$$\frac{\frac{dP}{dr}/P}{\frac{dT}{dr}/T} > \frac{\gamma}{\gamma - 1}$$

llamando $\Gamma = \frac{\gamma}{\gamma-1}$, la condición para que ocurra el transporte convectivo se convierte finalmente en,

$$\frac{d \ln P}{d \ln T} < \Gamma \quad (3.15)$$

Una de las cuestiones que había motivado nuestro estudio de los mecanismos de transporte de energía en el interior estelar era la de que estos determinaban el gradiente de una de las cantidades físicas que nos faltaba por describir en nuestro estudio del interior estelar : la temperatura.

Los análisis anteriores nos llevan finalmente a la solución del problema inicialmente planteado. El gradiente de temperatura en el interior de la estrella está dado por,

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{4\sigma} \frac{\bar{\kappa}\rho}{T^3} \frac{L_r}{4\pi r^2}, \text{ si } \frac{d \ln P}{d \ln T} > \Gamma \quad (3.16)$$

$$\frac{dT}{dr} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr}, \text{ si } \frac{d \ln P}{d \ln T} < \Gamma \quad (3.17)$$

Nótese que se ha asumido como gradiente de temperatura en el caso de transporte convectivo el gradiente adiabático, el valor mínimo que dicho gradiente puede asumir para que tenga lugar la convección.

3.7 Solución a las ecuaciones de la estructura estelar

A lo largo de este capítulo hemos hecho una revisión más o menos completa de los procesos que tienen lugar en el interior de las estrellas. En nuestro proceso de búsqueda de respuestas relativas a esta invisible región de la estrella, hemos obtenido una serie de construcciones físico-matemáticas que pueden describir con precisión las condiciones reinantes en el interior de las estrellas.

Dichas condiciones pueden caracterizarse, como vimos, por un conjunto de 4 variables : la presión, la temperatura, la masa y la luminosidad contenida. Asociadas a estas 4 variables hallamos 4 ecuaciones diferenciales que describen la manera como ellas deben

variar a todo lo largo de la estrella para satisfacer unas condiciones mínimas de equilibrio hidrostático, térmico y radiativo :

$$\begin{aligned}
 \frac{dP}{dr} &= -\frac{GM_r}{r^2}\rho \\
 \frac{dM_r}{dr} &= 4\pi r^2\rho \\
 \frac{dL_r}{dr} &= 4\pi r^2\rho\epsilon \\
 \frac{dT}{dr} &= -\frac{3}{4\sigma}\frac{\bar{\kappa}\rho}{T^3}\frac{L_r}{4\pi r^2} \quad \text{si } \frac{d\ln P}{d\ln T} > \frac{\gamma}{\gamma-1} \\
 \frac{dT}{dr} &= -\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\frac{\mu m_H}{k}\frac{GM_r}{r^2} \quad \text{si } \frac{d\ln P}{d\ln T} < \frac{\gamma}{\gamma-1}
 \end{aligned}$$

Este conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales acopladas, recibe el nombre de *Ecuaciones de la Estructura Estelar* y representan una de las más importantes herramientas del astrofísico estelar en el estudio de la estructura detallada de las estrellas.

En ellas participan, además de las variables ya mencionadas (T , P , M_r , L_r) otras cantidades físicas conectadas fundamentalmente con las propiedades particulares de la materia en cada punto de la estrella. Ellas son la densidad (ρ), la opacidad media ($\bar{\kappa}$, el promedio es hecho sobre longitudes de onda) y la rata de generación de energía (ϵ). Estas cantidades, encontramos, se encuentran directamente relacionadas con las variables dependientes, de las ecuaciones de la estructura estelar, relaciones que podemos expresar de la manera más general en la forma,

$$\begin{aligned}
 \rho &= \rho(P, T, X_A) \\
 \bar{\kappa} &= \bar{\kappa}(P, T, X_A) \\
 \epsilon &= \epsilon(P, T, X_A)
 \end{aligned}$$

Donde X_i representa la fracción de masa correspondiente a la especie atómica con número de masa A (A barre sobre todos los valores posibles).

La forma de estas funciones, conocidas como *Ecuaciones de Estado* o *Ecuaciones Constitutivas*, es dada explícitamente por resultados provenientes en general de otras áreas de la física. Así por ejemplo la dependencia de la densidad con la presión y la temperatura es provista por los métodos estadísticos de la física ; la opacidad, es dada por el estudio mecánico cuántico del problema de la interacción de la radiación con la materia y el coeficiente de emisión, para nuestro caso particular, es provisto por la física nuclear.

Cuando se proveen las condiciones de frontera del caso a las ecuaciones de la estructura estelar, una solución al problema matemático puede ser, en teoría, obtenida. Dicha solución nos provee del valor de todas las variables relevantes en el estudio de la materia en el interior estelar, P , T , M_r , L_r , ρ , ϵ , $\bar{\kappa}$. El conjunto de estas funciones (o sus valores punto a punto) forma lo que los astrofísicos conocen como un *Modelo Estelar*. Pero no

sólo es posible obtener el relativamente inobservable valor interior de estas cantidades. Es posible también predecir observables como el radio y la luminosidad de la estrella que contrastados con la realidad confirman o niegan el modelo elaborado.

¿Qué se puede decir de la unicidad de la solución de las ecuaciones de la estructura estelar ?. Pensando en este problema, en la década de los 20, H. Voght, Henry Norris Russell (el mismo del diagrama), R.S. Dugan y J. Q. Stewart, elaboraron el conocido como *Teorema de Voght-Russell*, que en su forma original reza así :

Si la presión, la opacidad y la rata de generación de energía son funciones sólo del valor local de la densidad, la temperatura y la composición química, entonces la estructura de la estrella está determinada de manera única por su masa y composición química.

Esto es, una vez se fijan los valores de la masa y la composición química para la estrella un sólo modelo de la estrella puede ser construido.

¿Cómo resolver el intrincado sistema de ecuaciones diferenciales, no lineales, acopladas que tenemos entre manos ?. Dado que la solución analítica al problema es en extremo complicada por no decir imposible (una aproximación analítica puede ser hecha utilizando el denominado modelo de los Politropos), en la práctica se recurre al uso de métodos numéricos para la solución de ecuaciones diferenciales, a veces sumamente sofisticados.

3.8 Ejercicios

3.1 Cuando se consideran validas ciertas aproximaciones, puede obtenerse en la atmósfera de una estrella una solución analítica a las ecuaciones de la estructura estelar. Una de las suposiciones que se hace respecto al comportamiento de la materia en las capas superiores de la estrella es la de que allí prima el proceso de transporte radiativo.

- Escriba las ecuaciones de la estructura estelar para el caso considerado. En cada una de ellas exprese la densidad y la opacidad media en términos sólo de la Presión y la Temperatura, usando para ello la ecuación de estado y la denominada *ley de Kramer*, que expresa la opacidad en términos sólo de la densidad y la temperatura en la forma : $\langle \kappa \rangle = A\rho/T^{3.5}$.

Ayuda: Recuerde que para esta región de la estrella $M_r \approx M_s$ y $L_r \approx L_s$.

- Utilizando la regla de la cadena, $dP/dT = (dP/dr)/(dT/dr)$, resuelva la ecuación para $P(T)$, i.e. encuentre que,

$$P = \left(\frac{5,02\pi G M_s \sigma k}{L_s A \mu m_H} \right)^{1/2} T^{4,25}$$

- c. Sustituyendo en la ecuación para T , la función $P(T)$, demuestre que,

$$T = GM_s \left(\frac{\mu m_H}{4, 25k} \right) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_s} \right)$$

NOTA: En la integración de las ecuaciones diferenciales, justifique claramente los límites de integración.

- 3.2 En el Sol se producen en promedio, por la cadena protón-protón 26,7 MeV, energía que escapa del núcleo y se convierte en la radiación que finalmente abandona el Sol.

- ¿ Cuántas ciclos pp tienen lugar en el Sol en un segundo?
- calcule la masa total que pierde el Sol cada segundo.
- En las reacciones de Fusión nuclear existe una conversión neta de núcleos de Hidrógeno (4 por ciclo) en núcleos de Helio. Teniendo en cuenta lo obtenido en el numeral 1 calcule el número de Núcleos de Hidrógeno que desaparecen en el centro del Sol cada segundo. A partir de este resultado evalúe la masa de Hidrógeno que cada segundo se convierte en Helio en las regiones centrales del Sol.

- 3.3 Utilizando la relación entre las variables de estado en un proceso adiabático y la ecuación de estado del gas ideal demostrar que en el transporte de energía por convección adiabática se satisface que,

$$\frac{dT}{dr} = - \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{\mu m_H}{k} \frac{GM_r}{r^2}$$

- 3.4 Asumiendo que la estrella Sirio se encuentra en equilibrio hidrostático y sabiendo que su masa es $2,25 M_{\odot}$, su luminosidad $19 L_{\odot}$ y su temperatura efectiva es 9500 K, determinar, suponiendo la densidad constante e igual a la media y usando la ecuación del equilibrio hidrostático, la temperatura y la presión en el núcleo de la estrella.

- 3.5 Asumiendo que 10 eV podrían ser liberados por cada átomo del Sol a través de reacciones químicas, estimar cuánto tiempo podría brillar el Sol manteniendo su luminosidad actual si los procesos químicos fueran los responsables de la producción de su energía. Por simplicidad asuma que el Sol está enteramente compuesto por Hidrógeno. ¿ Es posible que el Sol sea alimentado enteramente por energía química ?, ¿ por qué ?.