

Capitulo 3 – Un Universo Newtoniana

Como el modelo de Bohr en la fisica atomica, es posible introducir conceptos fundamentales en un manera ilustrativa, pero incorrecta

la aplicacion de gravitacion Newtoniana da resultados correctos en escalas pequenas --- cuando consideramos volumenes del orden del radio de Hubble (ya mas pequeno) ----> relatividad general

3.1 Cinematica – coordenadas comoviles

consideramos un globo en expansion radial homogenio

--> densidad $\rho = \rho(t)$

eligimos un punto de tiempo t_0 y introducimos un sistema de
coordenadas polares

una particula tendra la coordenada r_0 en t_0

describimos la coordenada $r(t)$ para esta partícula por

$$r(t) = R(t) \cdot r_0$$

y nombramos $R(t)$ el "factor" de escala

Normalización es arbitraria y sea $R(t) = 1$ para $r(t) = r_0$

homogeneidad $\rightarrow R(t)$ es solo una función del tiempo

velocidad de una partícula "co-móvil"

$$v(r, t) = \frac{d}{dt} r(t) = \dot{R}(t) r_0 = \frac{\dot{R}}{R} \cdot r = H(t) \cdot r$$

con $\frac{\dot{R}}{R} = H(t)$

la velocidad relativa de dos partículas comóviles

$$\Delta v = v(r + \Delta r, t) - v(r, t) = H(t) \cdot (r + \Delta r) - H(t) \cdot r = H(t) \cdot \Delta r$$

cada observadora comovimiendo se ve un campo de velocidades descrito por

$$v = H(t) \cdot r$$

3.2 Dinamica

descripcion cinematica no proporciona el comportamiento temporal de $H(t)$, $R(t)$, $\rho(t)$

---> necesitamos la descripcion dinamica

en un contexto Newtoniana, la gravitacion propia del globo determina el comportamiento temporal

consideramos un globo con radio $r(t) = R(t) \cdot r_0$,
la masa es constante! :

$$M(r_0) = \frac{4}{3} \pi \cdot \rho_0 r_0^3$$

identificamos ρ_0 con la densidad hoy dia

$$\text{-----> } M(r_0) = \frac{4}{3} \pi \cdot \rho(r) R^3(t) r_0^3(t)$$

entonces para la densidad:

$$\rho(t) = \rho_0 \cdot R^{-3}(t)$$

obtenemos la ecuacion del movimiento para una particula en la superficie del globo

esta particula experimenta la aceleracion:

$$\ddot{r}(t) = \frac{-G M(r_0)}{r^2} = -\frac{4\pi G \rho_0 r_0^3}{3 r^2}$$

sustitucion : $r(t) = r_0 \cdot R(t)$

$$\ddot{R}(t) = \frac{\ddot{r}(t)}{r_0} = -\frac{4\pi G \rho_0}{3 R^2(t)} = -\frac{4\pi G}{3} \rho(t) \cdot R^2(t)$$

---> ecuacion del movimiento es independiente de r_0

---> el concepto de un globo en expansion esta desaparecido !!

otro camino para obtener otra ecuacion para $R(t)$:
conservacion de energia

la suma de energia cinetica y energia potencial es constante:

derivar la ecuacion del movimiento:
multiplicar con $2 \dot{R}(t)$

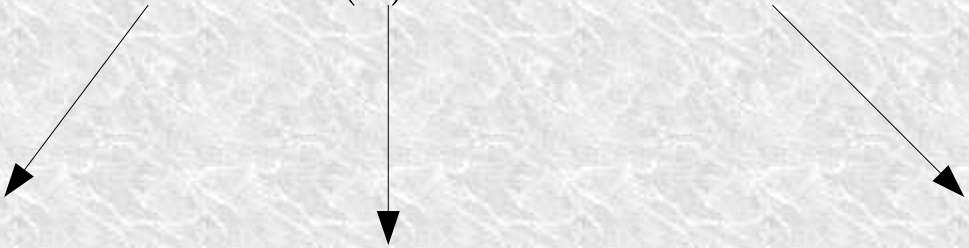
con las relaciones $\frac{d \dot{R}^2}{dt} = 2 \dot{R} \ddot{R}$ $-\frac{d}{dt} \frac{1}{R} = \frac{\dot{R}}{R^2}$ obtenemos

$$\dot{R}^2 = \frac{8 \pi G}{3} \rho(t) R^2(t) - K c^2$$

siendo $K c^2$ una constante de integracion que interpretamos mas
tarde

multiplicado por $\frac{r_0^2}{2}$

da

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r(t)} = -K c^2 \frac{r_0}{2}$$


energia cinetica energia potencial cte.

la constante K es proporcional a la energia total de una partícula comovimiendo $\rightarrow$ historia de la expansión se depende de K

K puede ser < 0 , 0 , > 0 $\rightarrow$ energia total positiva, cero, negativa

obviamente se debe distinguir entre estos casos en las ecuaciones de movimiento

ecuacion: $\dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho(t) R^2(t) - K c^2$

caso 1: $K < 0$ ---> lado derecho siempre positivo,
 dR/dt nunca cero
 ---> expansion continua por infinidad

caso 2: $K = 0$ ---> lado derecho siempre positivo, pero como
 $\rho(t) \sim R^{-3}$, $dR/dt \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \infty$
 expansion para $t \rightarrow \infty$

caso 3: $K > 0$ --> hoy dia dR/dt positivo, pero el primer termino
 vuelve mas pequeño que $K c^2$
 ---> expansion para y contraccion empieza

analogia con orbitas cometarias: cometa ligado --> energia total negativo
 --> orbita eliptica, cometa no ligado --> energia total positivo
 --> orbita hiperbolica

el caso $K = 0$: obviamente un caso critico, distinguiendo entre expansion infinito y expansion con contraccion siguiente

---> corresponde a una densidad ρ_{critico} , para hoy dia se deriva ρ_{critico} de la ecuacion del movimiento

$$\rho_c = \frac{3 H_0^2}{8 \pi G} \approx 10^{-29} \text{ g/cm}^3$$

normalmente, se usa parametros sin dimensiones, --> introduccion del parametro de densidad (para hoy dia)

$$\Omega_0 = \frac{\rho_0}{\rho_c}$$

nomenclatura: nombramos los casos

$K < 0$ ---- universo cerrado

$K = 0$ ---- universo plano

$K > 0$ ---- universo abierto

(los nombres tienen mas sentido en el contexto de relatividad general)

determinación de Ω_0 un desafío importante de la cosmología!

contribuciones en el caso Newtoniana:

estrellas,

gas

materia oscura barionica (agujero negros...)

materia oscura no barionica (partículas WIMPs...)

por ejemplo Ω_0 (estrellas) < 0.01

3.3 Soluciones de las ecuaciones de la expansion

consideramos las soluciones acerca de los casos diferentes

Universo plano ($k=0$, mas facil):

ecuacion:
$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G \rho_{c,0}}{3 R(t)}$$

raiz y integracion
$$\int_0^R \sqrt{R'} dR' = \int_0^t 8\pi G \rho_{c,0} dt'$$

resultado
$$R(t) = (6\pi G \rho_{c,0})^{1/3} t^{2/3}$$

en terminos del tiempo de Hubble
$$R(t) = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} \left(\frac{t}{t_H}\right)^{2/3}$$

Universo cerrado ($k < 0$):

mas dificil de solver , la solucion es

$$R(t) = \frac{4\pi G \rho_0}{3kc^2} (1 - \cos(x))$$

ejercicio!

siendo $x > 0$ un parametro que tiene la relacion con t

$$t = \frac{4\pi G \rho_0}{3k^{3/2} c^3} (x - \sin(x))$$

usando la relacion

$$H_0^2 (\Omega_0 - 1) = kc^2$$

ejercicio!

escribimos

$$R(t) = \frac{1}{2} \frac{\Omega_0}{\Omega_0 - 1} (1 - \cos(x))$$

y

$$t = \frac{1}{2H_0} \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{3/2}} (x - \sin(x))$$

Universo abierto ($k > 0$):

soluciones

$$R(t) = \frac{4\pi G \rho_0}{3|k|c^2} (\cosh(x) - 1)$$

$$t = \frac{4\pi G \rho_0}{3|k^{3/2}|c^3} (\sinh(x) - x)$$

ejercicio!

usando la relacion $H_0^2(\Omega_0 - 1) = kc^2$

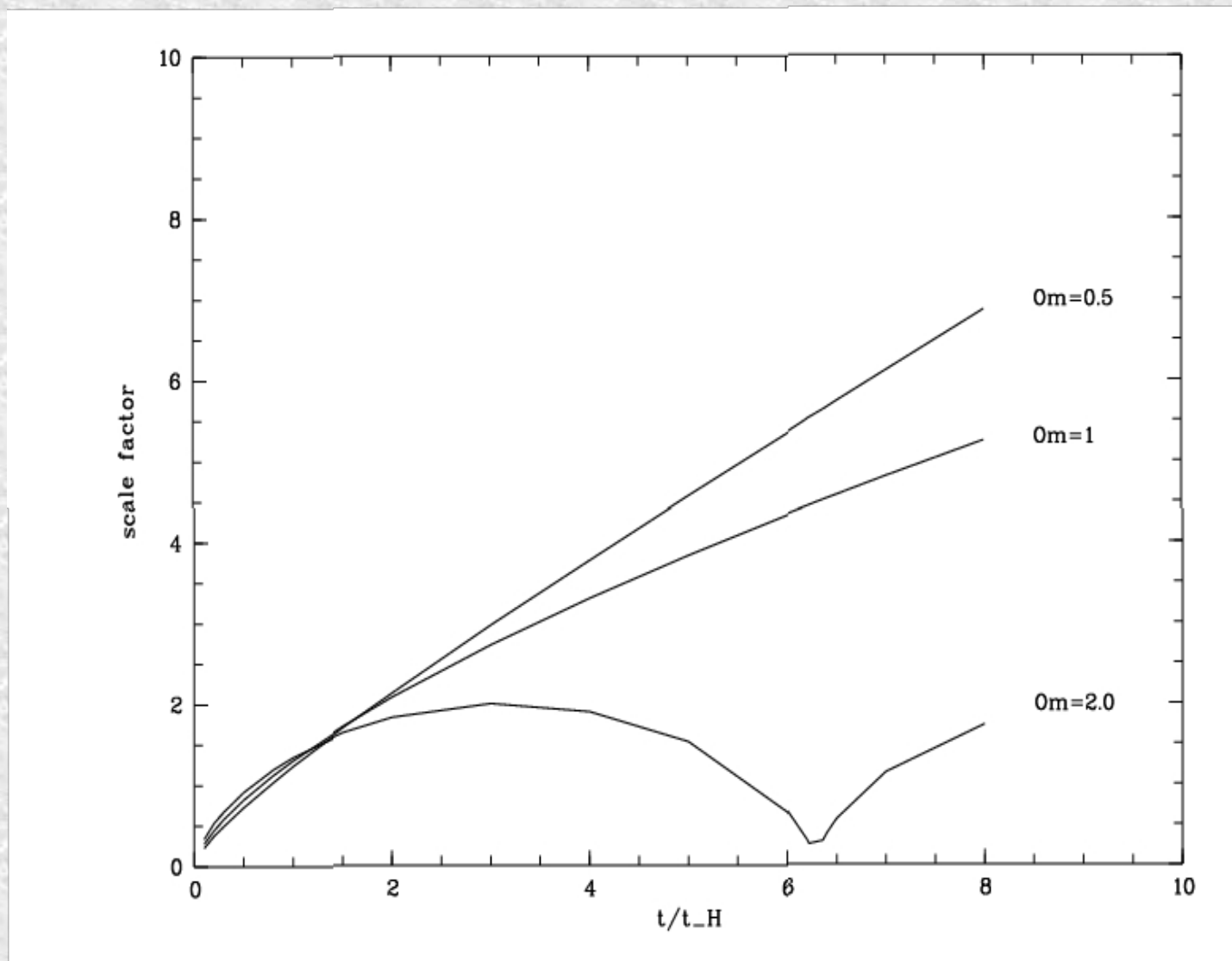
escribimos

$$R(t) = \frac{1}{2} \frac{\Omega_0}{1 - \Omega_0} (\cosh(x) - 1)$$

y

$$t = \frac{1}{2H_0} \frac{\Omega_0}{(1 - \Omega_0)^{3/2}} (\sinh(x) - x)$$

soluciones para $\Omega_0 = 0.5, 1, 2.0$ en unidades del tiempo de Hubble



3.4 Enrojecimiento

El parametro $R(t)$ en las ecuaciones en un constructo teorico

--> necesitamos relaciones a observables

observable mas importante es el enrojecimiento $z = \frac{\Delta \lambda}{\lambda}$

Universo Newtoniana solo conoce una interpretacion: efecto Doppler

para derivar la relacion entre z y $R(t)$ necesitaríamos relatividad general

aqui un truco: describir la relacion diferencialmente (localmente no hay problemas con la interpretacion) y integrar despues

imaginamos un rayo de luz: a largo de este rayo estan dos observadores en una distancia relativa dr

ellos miden su velocidad relativa segun $dv = H(t) dr$

ellos miden un enrojecimiento $\frac{d\lambda}{\lambda} = dz = \frac{dv}{c}$

la luz necesita un cierto tiempo para atravesar la distancia entre los dos observadores

$$dt = \frac{dr}{c}$$

ademas $\frac{dR(t)}{dt} = H(t) R(t) \rightarrow dt = \frac{dR}{H(t) R(t)}$

y por eso $\frac{d\lambda}{\lambda} = H(t) \frac{dr}{c} = H(t) dr = \frac{dR(t)}{R(t)}$

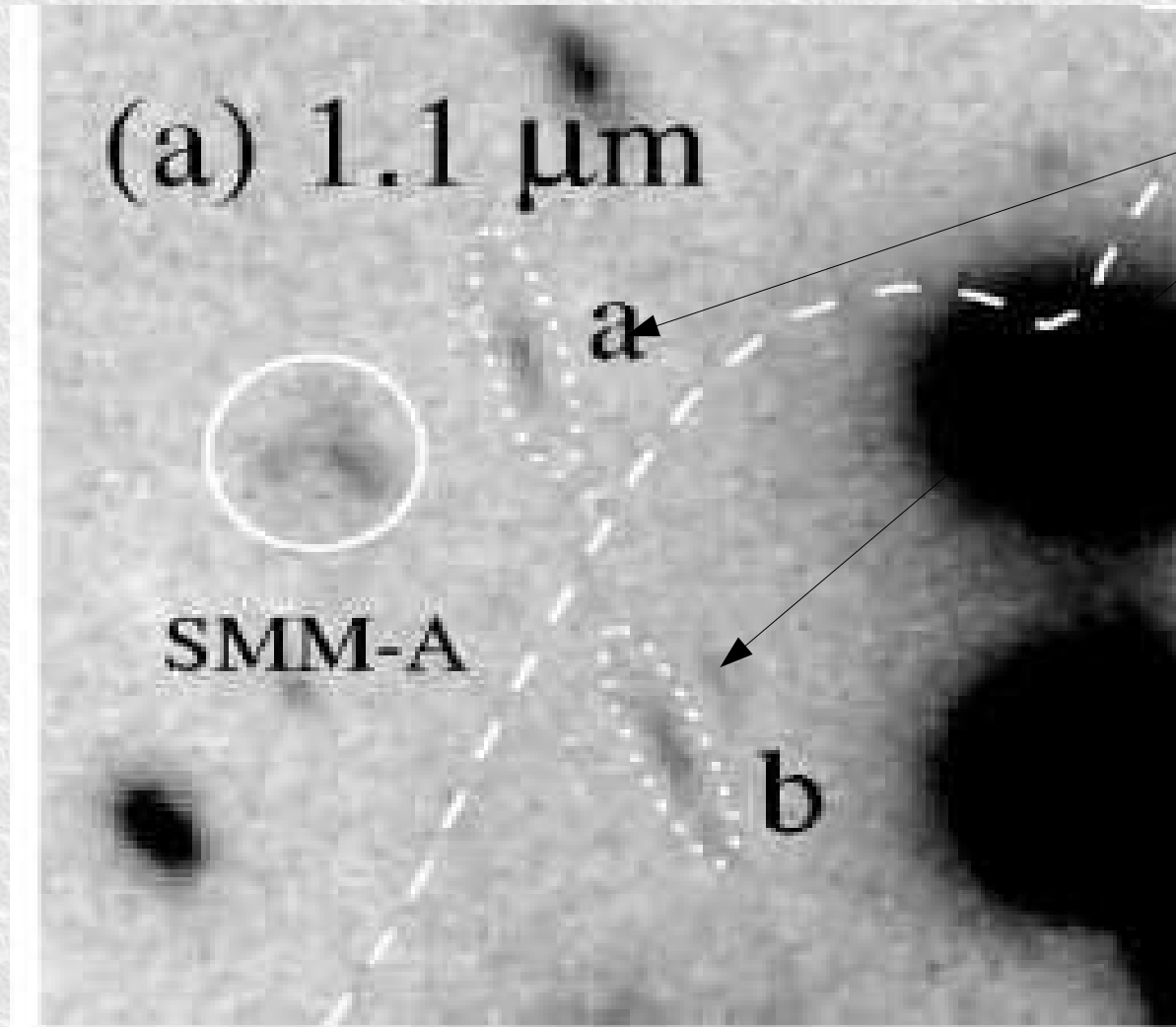
ecuacion diferencial (simple) para λ con la solucion $\lambda = R(t) * \text{cte.}$

condicion del borde : para $R(t) = 1 \rightarrow \lambda = \lambda_{\text{observado}}$

----> $1 + z = \frac{1}{R(t)}$ fundamental! independiente del modelo cosmologico

enrojecimiento directamente nos da el factor de escala cuando
un foton ha sido emitido

enrojecimiento mas grande hasta hoy dia: galaxia en Abell 2218
---> dos imagenes por lente gravitacional



$z = 6.8$

Egami et al. 2005, ApJ 618,
L5

enrojecimiento de la radiacion de fondo : $z = 1100$

ahora: relacion entre el enrojecimiento y el tiempo de emision de un foton

para un Universo plano --> insertar $(1+z) = R^{-1}$ en la solucion de ecuacion de movimiento

$$\frac{t(z)}{t_H} = \frac{2}{3} \frac{1}{(1+z)^{3/2}}$$

ejercicio: encuentra las expresiones para $k < 0$ y $k > 0$

--> edad del Universo significa $z=0$ --> $t(z) = t_0$

$$t_0 = \frac{2}{3} t_H$$

encontrar la ley de Hubble como aproximacion para $z \ll 1$

$$R(t) = \frac{1}{1+z} = 1 - z + O(z^2)$$

entonces

$$z \approx 1 - R(t) = \Delta R = H_0 \Delta t = H_0 \frac{d}{c}$$

ley de Hubble es una relacion entre el enrojecimiento y distancia
para distancias pequeñas

para z grande: complicado

pero: relacion entre velocidad y distancia: siempre lineal

enrojecimiento y dilatacion del tiempo

enrojecimiento en terminos de frecuencias
(a=absorbido, e=emitido)

$$1 + z = \frac{\lambda_a}{\lambda_e} = \frac{\nu_e}{\nu_a}$$

significa que las crestas de ondas electromagneticas llegan con retraso ---> dilatacion del tiempo

valido no solo para fotones pero para **todos los eventos**

imaginamos dos eventos que pasan en tiempos t_1 y t_2
sea $t_2 - t_1 = \delta t$ pequeño. Que se ve una observadora distante?

en t_2 , la luz del primer ha atravesado la distancia $c * \delta t$

sin expansion, esta distancia siempre permaneceria la misma

con expansion, la distancia se aumenta

$$c \cdot \delta t \sim R(t)$$

con c constante ---> δt se aumenta, la observadora se ve un δt mas grande

entonces generalmente:

$$\frac{\delta t_a}{\delta t_e} = \frac{1}{R(t_e)} = 1 + z_e$$

otra interpretacion de enrojecimiento cosmologico como efecto del dilatacion del tiempo!

aqui diferencia al efecto Doppler!

dilatacion del tiempo del efecto Doppler (efecto relativista):

$$\frac{\delta t_a}{\delta t_e} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{factor de Lorentz}$$

3.5. Tests: posibilidad de probar observacionalmente la expansion del Universo!

necesario: eventos de alto enrojecimiento con un comportamiento temporal conocido y observable(!)

----> Supernovas Ia

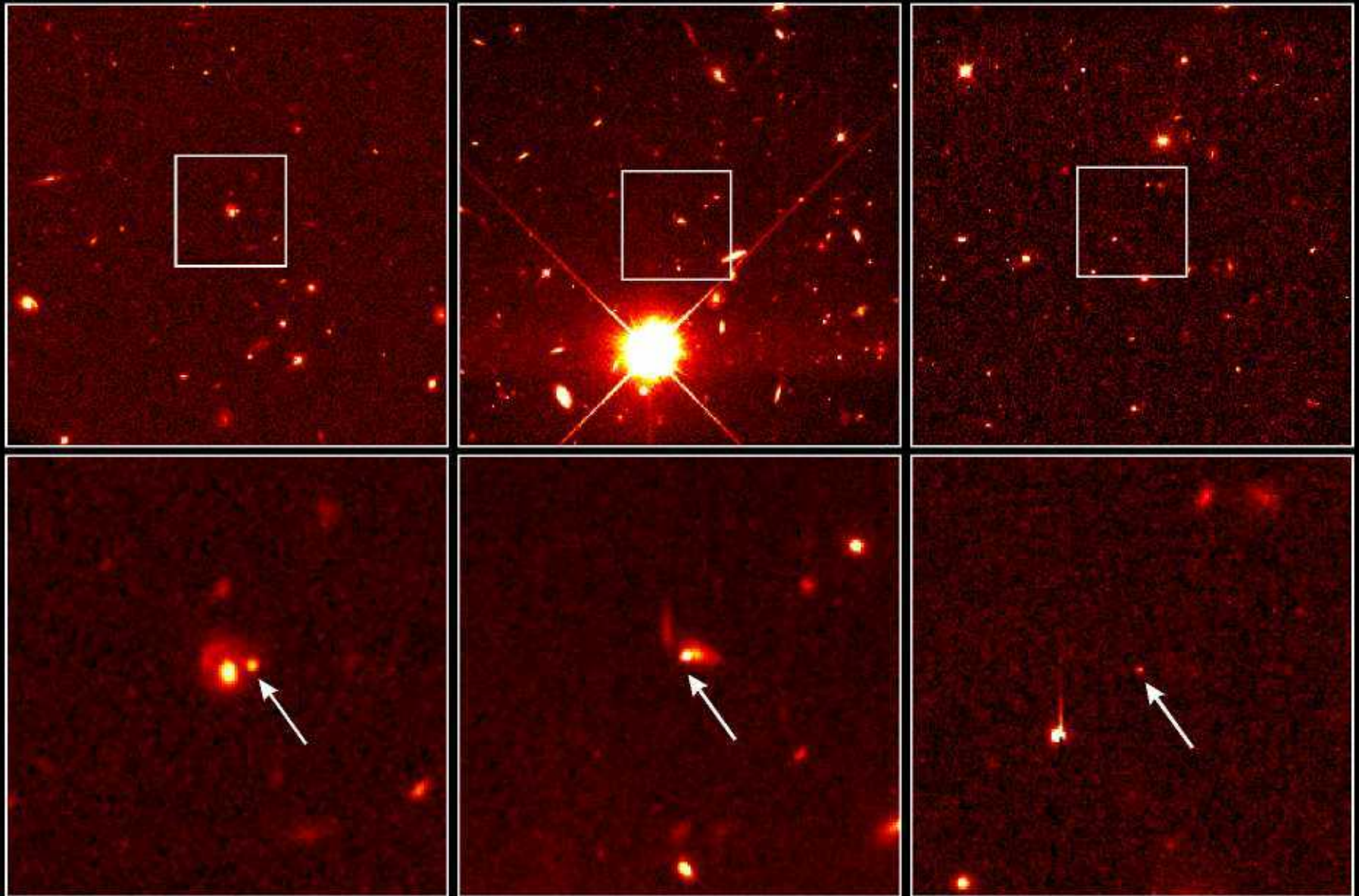
evento: decaido de las curvas de luz

decaido muy constante con una dependencia de la luminosidad bien conocido

necesitamos supernovas con alto z , pero hace 15 años difícil de detectar

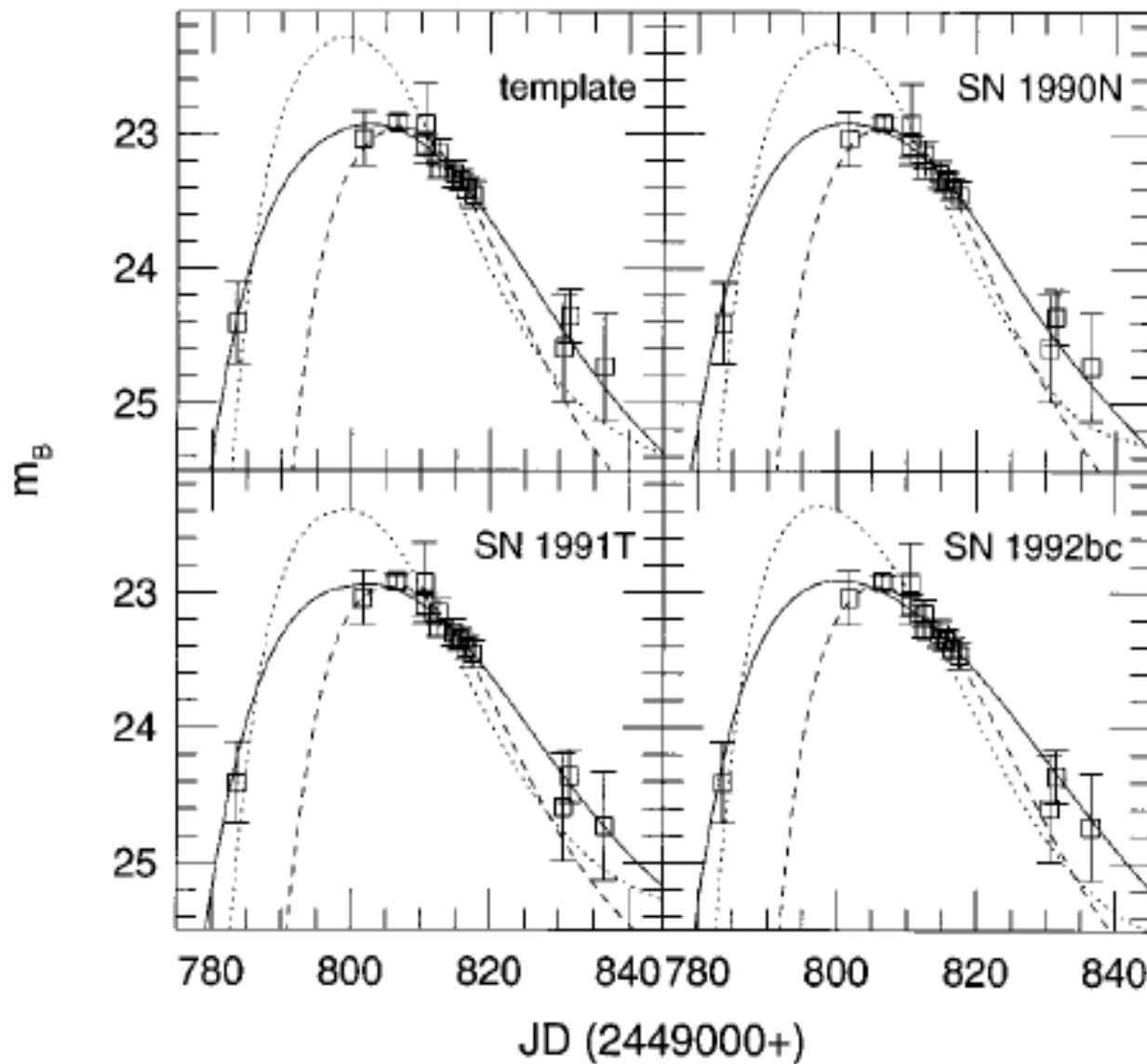
SN 1997cj





Distant Supernovae
Hubble Space Telescope • Wide Field Planetary Camera 2

Observaciones de SN 1995k y comparison con las curvas de luz de supernovas "cercanas" y bien observados



dilatacion de la
curva de luz!

Leibundgut et al. 1996
ApJ 466, L21

otra prueba: la prueba de Tolman - brillos superficiales

imaginamos una cosa artificial: galaxia circular, brillo superficial constante, face-on, diametro D, luminosidad L

en un Universo sin expansion:

$$\mu \sim \frac{L}{r^2} \frac{1}{\phi^2} = \frac{L}{r^2} \frac{r^2}{D^2} = \frac{L}{D^2}$$

siendo Φ el diametro angular, r la distancia,

---> brillo superficial es independiente de la distancia

en un Universo con expansion: significancia de varios r cambia

r relacionado a la medida de brillo aparente --> r en momento de absorcion: r_a

r relacionado al diametro angular --> r en momento de emision: r_e

$$\mu \sim \frac{L}{r_a^2} \frac{1}{\phi^2} = \frac{L}{r_a^2} \frac{r_e^2}{D^2}$$

pero: $r_a = r_{comovil} \cdot R(t_0) = r_{comovil} \cdot 1$

y $r_e = r_{comovil} \cdot R(t_e) = r_{comovil} \cdot (1+z)^{-1}$

entonces: $\mu \sim \frac{L}{D^2} (1+z)^{-2}$

mas dependencias en z :

brillo superficial **bolometrico**: enrojecimiento significa tambien la perdida de energias de los fotones $E = hc/\lambda \sim (1+z)^{-1}$

ademas: dilatacion del tiempo – fotones llegan con retraso -- $(1+z)^{-1}$

por eso
$$\mu \sim (1+z)^{-4}$$

independiente del modelo cosmologico!

pero test es dificil: brillo no esta medida bolometricamente, sino en una banda --> necesario correccion a la luminosidad para $z=0$ ("k-correction")
depende del modelo cosmologico

tambien diametro s dependen de modelo cosmologico

otra interpretacion de la radiacion del fondo:

cuerpo negro con un brillo superficial bajo debido al z

con $z = 1100$ ---> factor $1.2 \cdot 10^{12}$

test de Tolman – brillos superficiales de galaxias (banda K) promedios en tres cumulos de galaxias

difficultades: evolucion estelar en las galaxias, correccion k, definicion del diametros etc.

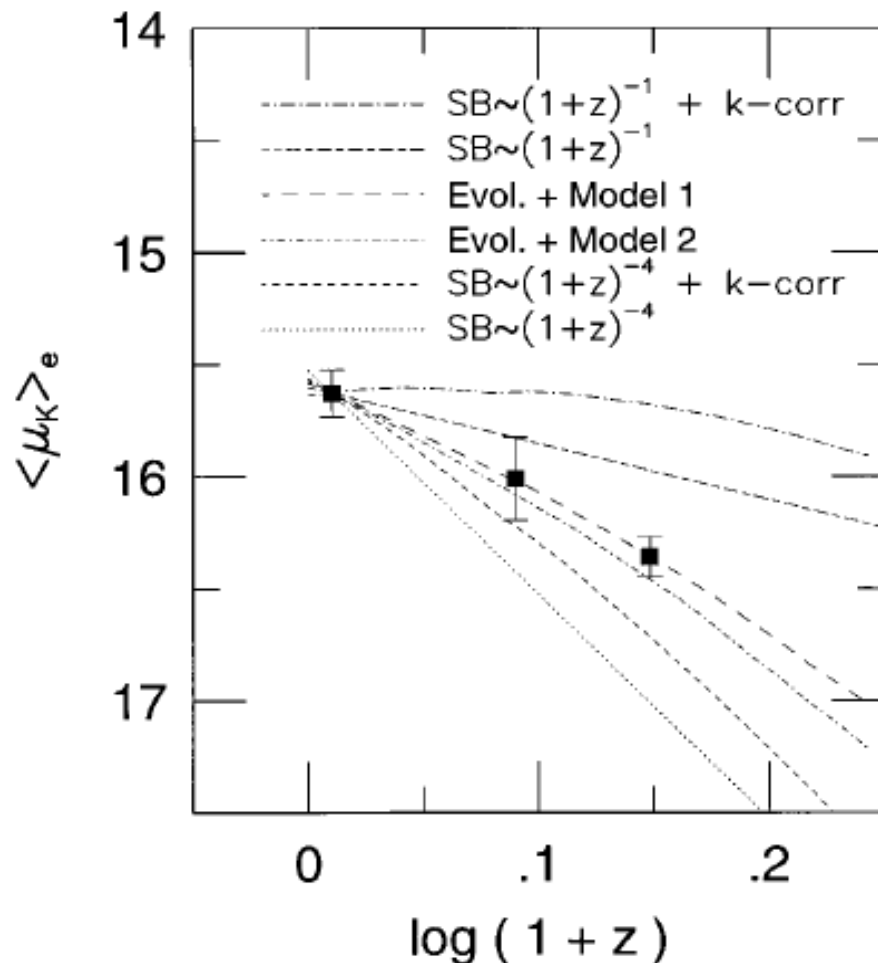


FIG. 2.—Tolman SB test in the K band using the intercepts on the $\langle \mu \rangle_e$ -axis, where $R_e = 1$ kpc ($H_0 = 75$ km s $^{-1}$ Mpc $^{-1}$, $\Omega_0 = 0.2$, and $\Lambda_0 = 0$). The data are uncorrected for SB dimming, nor has a k -correction been applied. Plotted for comparison are the expansion $(1+z)^{-4}$ and nonexpansion $(1+z)^{-1}$ models, both with and without a k -correction. Models 1 and 2 (from Buzzoni 1995) both include SB dimming, a k -correction, and passive evolution (Evol.) using cosmological parameters (H_0, Ω_0, z_f) of (50, 0.5, ∞) and (100, 0, ∞), respectively. The data are consistent with luminosity evolution in the cluster optical galaxy population as predicted by the simple stellar population models.

Pahre et al. 1996, ApJ 456, L79

Por que la descripcion Newtoniana no puede ser completa

densidad energia de energia de un cuerpo negro:

$$u = \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty B(\lambda) d\lambda = 4 \frac{\sigma}{c} T^4 = a \cdot T^4$$

con $E = m c^2$ para la densidad de masa correspondiente

$$\rho_{rad}(R) = \frac{u(R)}{c^2} = \frac{a T^4(R)}{c^2} = \frac{a T_0^4}{R^4 c^2}$$

por otro lado $\rho_{materia} \sim \frac{1}{R^3}$

---> densidad de energia crece mas fuerte que la materia

---> habia una epoca cuando la expansion estaba dominado por radiacion

---> no incluido en la aproximacion Newtoniana