4. Universos de Friedmann

4.1 Modificaciones, termodinamica y ecuaciones del estado

aplicacion de relatividad no cambia mucho en las ecuaciones de expansion, pero modifica algunos aspectos

1. por ejemplo electrodinamica: energia potencial arbitraria con respecto de un punto de cero
   pero: relatividad general: gravitacion esta relacionado con cada forma de energia, no solo de masa

2. tambien en las ecuaciones Newtonianas, no hay ninguna solucion estatica ---> igual en las ecuaciones relativistas
   Einstein (1916) queria una solucion estatica
   ---> introduccion de "constante cosmologico"

3. interpretacion de la expancion:

Universo Newtoniana: galaxias se receden a traves del espacio

Universo relativista: el espacio mismo expande

interpretacion de constante k:

Universo Newtoniana: k y su signo determina la energia total

Universo relativista: k significa la curvatura del espacio

$k = 0$ espacio plano

$k = 1$ espacio positivamente curva

$k = -1$ espacio negativamente curva

postergamos el punto 3, desvio a la fisica fundamental

termodinamica: primer teorema principal

---> cambio de energia interna igual menos presion por cambio del volumen

$$dU = - P\, dV$$

relatividad general: lo mismo, pero energia es energia total en un Universo en expancion (debido a E = mc^2):

$$\frac{d}{dt}(c^2 \rho R^3) = -P \frac{d}{dt} R^3$$

con $c^2 \rho$ como densidad de energia

consideramos los componentes que contribuyen a la densidad de energia

los componentes son: materia normal, radiacion, energia del vacuo

materia normal

presion << $\rho\ c^2$ = libre de presion, "polvo" , entra solo por su densidad de masa, no por su presion
---> es la razon por que la descripcion Newtoniana es descripcion buena para la expansion hoy dia

radiacion

principalmente: toda radiacion , por ejemplo galaxias, particulas relativistas, pero hoy dia presion despreciable
---> se queda: radiacion del fondo en epocas tempranos

ya sabemos que $$c^2\rho = c^2\frac{\rho_0}{R^4}$$

insertar en dU = -PdV

$$\frac{d}{dt}\left(c^2\frac{\rho_{rad,0}}{R}\right) = -c^2\frac{\rho_{rad,0}}{R^2}\frac{dR}{dt} = -P\frac{dR^3}{dt} = -3PR^2\frac{dR}{dt}$$

resulta en $$P = \frac{1}{3}c^2\rho_{rad}$$

ecuacion del estado para radiacion en un Universo en expansion

vacuo

mecanica cuantica --> estados basicos tienen densidad de energia limitado, medible en electrodinamica (efecto de Casimir) normalmente: ningun importancia, electrodinamica solo considera diferencias (!) de potential

relativitad general como teoria de gravitacion:
gravitacion acopla a toda la densidad de energia/masa

historicamente: Einstein noto que ecuaciones de expansion no permiten ninguna solucion estatica, pero si, cuando uno agrega una constante (ejercicio) ("constante cosmologico Λ")

vamos a ver que la densidad de la energia del vacuo tambien aparece como constante en las ecuaciones --> identificacion con Λ

propriedad fundamental de la densidad de energia:
temporalmente y espacialmente constante

$$\frac{d}{dt}(c^2 \rho_{vac} R^3) = c^2 \rho_{vac} \frac{d}{dt} R^3 = -P \frac{d}{dt} R^3$$

entonces $$P = -c^2 \rho_{vac}$$

ecuacion del estado para el vacuo (no la unica posible, pero mas simple)

presion negativa como consecuencia del primer teorema de termodinamica

en este momento, solo sospechamos la existencia de una constante cosmologica como energia del vacuo

empiricamente sugerido por SNIa distantes!

4.2 Las ecuaciones de expansion de Friedmann

empezando otra vez con conservacion de energia

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho R^2 - kc^2$$

derivar y reemplazar por dρ/dt viniendo de

$$\frac{d}{dt}(c^2 \rho R^3) = -P \frac{d}{dt} R^3$$

resultando en $$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{R}}{R}\left(\frac{P}{c^2} + \rho\right)$$

da $$\frac{\ddot{R}}{R} = \frac{-4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3\mathrm{P}}{c^2}\right)$$

escribimos: $$\rho = \rho_m + \rho_{rad} + \rho_{vac} = \rho_{m+rad} + \rho_{vac}$$

y $$P = P_{rad} + P_{vac}$$

insertar las ecuaciones del estado

$$\frac{\ddot{R}}{R} = \frac{-4\pi G}{3}\left(\rho_{m+rad} + \rho_{vac} + \frac{3P}{c^2} - 3\rho_{vac}\right)$$

con la definicion: $\rho_{vac} = \frac{\Lambda}{8\pi G}$

finalmente: $$\boxed{\frac{\ddot{R}}{R} = \frac{-4\pi G}{3}\left(\rho_{m+rad} + \frac{3P}{c^2}\right) + \frac{\Lambda}{3}}$$

secunda ecuacion de Friedmann

$$\boxed{\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{-8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{R^2} + \frac{\Lambda}{3}}$$

primera ecuacion de Friedmann (muestra como ejercicio)

ecuaciones bastante parecidos a las ecuaciones Newtonianas!

como en el caso Newtoniana para $\Omega_{0,}$ introducimos parametros sin dimension para las varias componentes de la densidad

para la materia $\Omega_m = \frac{\rho_{m,0}}{\rho_{crit}}$ para la radiacion $\Omega_r = \frac{\rho_{rad,0}}{\rho_{crit}}$

para el vacio $\Omega_\Lambda = \frac{\rho_{vac}}{\rho_{crit}}$

y $\Omega_0 = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda$

con las dependencias conocidos

$$H^2(t) = H_0^2 \left(R^{-4}(t)\Omega_r + R^{-3}(t)\Omega_m - R^{-2}(t)\frac{kc^2}{H_0^2} + \Omega_\Lambda \right)$$

obtenemos el valor para la constante k de integracion por poniendo $H(t_0) = H_0$ y $R(t_0) = 1$

$$k = \left(\frac{H_0}{c}\right)^2 (\Omega_0 - 1) \approx \left(\frac{H_0}{c}\right)^2 (\Omega_m + \Omega_\Lambda - 1)$$

dimension de k: 1/longitud^2 -- curvertura

entonces la ecuacion de expansion

$$H^2(t) = H_0^2 \left(R^{-4}(t)\Omega_r + R^{-3}(t)\Omega_m - R^{-2}(t)(\Omega_m - \Omega_\Lambda) + \Omega_\Lambda \right)$$

soluciones analiticas solo para casos especiales
normalmente solo soluciones numericas

clasificacion