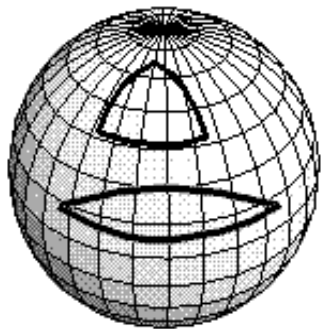


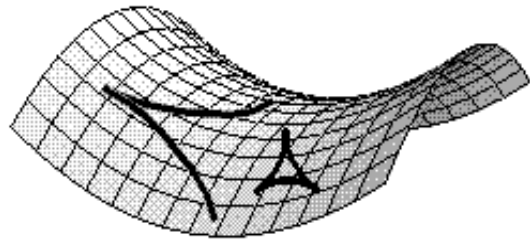
5. Distancias en el Universo

5.1 El concepto de curvatura

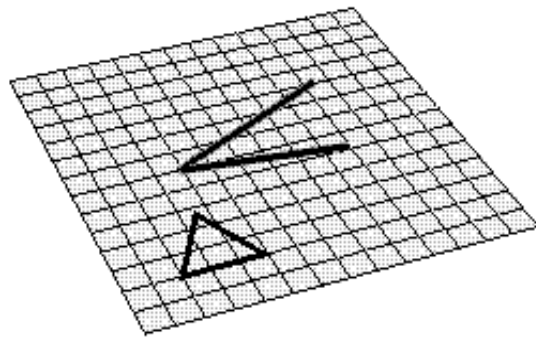
medida posible – triángulos en superficies



Universe with *positive* curvature. Diverging line converge at great distances. Triangle angles add to more than 180° .



Universe with *negative* curvature. Lines diverge at ever increasing angles. Triangle angles add to less than 180° .



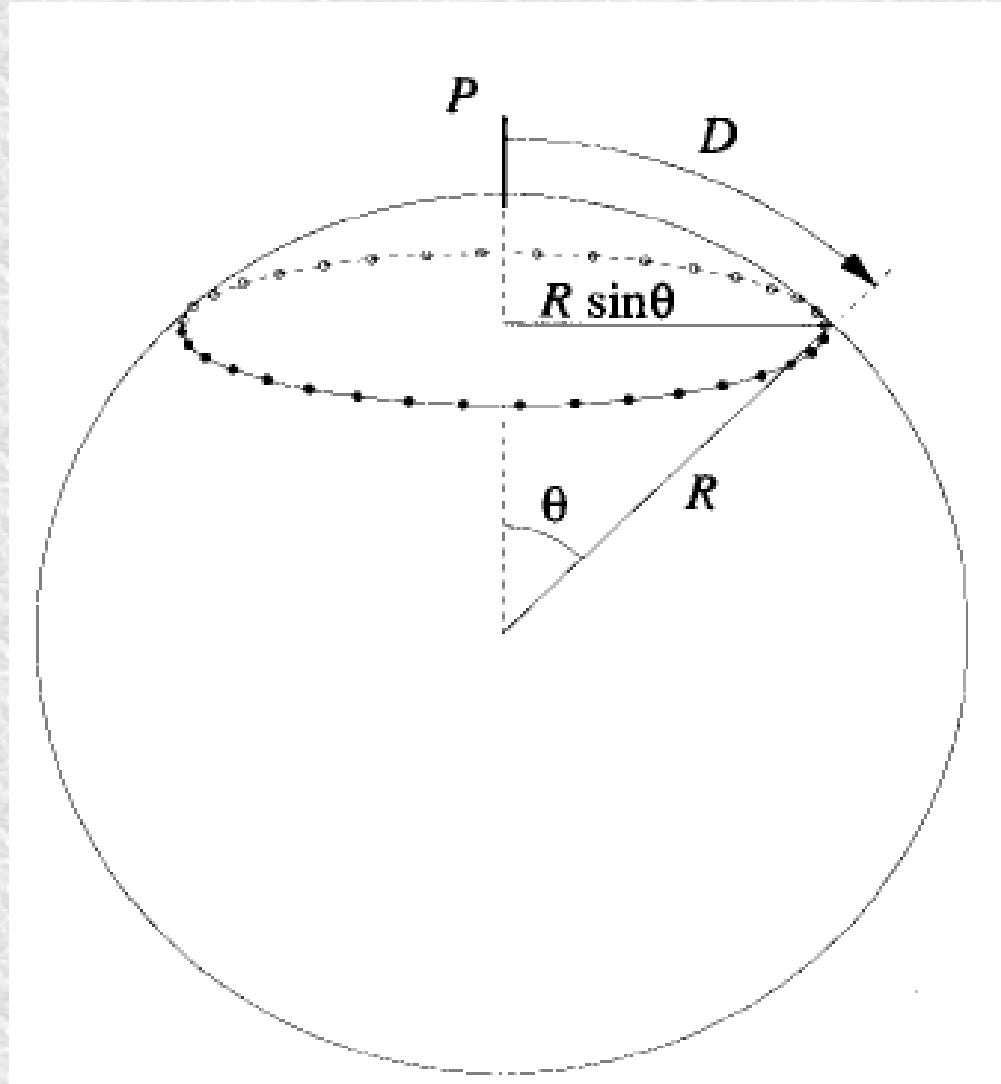
Universe with no curvature. Lines diverge at constant angle. Triangle angles add to 180° .

suma de angulos $> 180^\circ$
curvatura positiva

suma de angulos $< 180^\circ$
curvatura negativa

suma de angulos $= 180^\circ$
plano

medida de curvatura usando un circulo en la superficie de un globo



mejor – medida de curvatura en un punto

procedura: una area circular en un globo de radio R con un radio a lo largo de la superficie D ----> observadora calcula $2\pi D$ y πD^2 para circunferencia y area

en el plano intersectando el globo, la circunferencia es $2\pi R \sin(\Theta)$ y la area $\pi(\sin(\Theta)D)^2$

calculamos:

$$K = \frac{3}{\pi} \lim_{D \rightarrow 0} \frac{2\pi D - 2\pi \sin(D/R) D}{D^3}$$

$$K = \frac{1}{R^2}$$

curva positiva

$$K = -\frac{1}{R^2}$$

curva negativa

$$K = 0$$

plano

5.2 Metrica en el espacio-tiempo

en espacio "normal" , distancias estan medidas por la metrica

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

via integracion $\Delta l = \int_1^2 \sqrt{dl^2}$ a lo largo de un camino

seria util solo en un Universo estatico, plano, y con c infinita

Universo real, eje del tiempo siempre involucrado

---> necesitamos una metrica en el espacio-tiempo (x,y,z,t)

localmente, deberia ser Lorentz-invariant

---> prestamos la metrica de la relatividad especial

$$ds^2 = (cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

por ejemplo para un camino de fotones:

$$\int_A^B \sqrt{ds^2} = 0$$

cada camino para esto es valido, se llama "linea mundial"

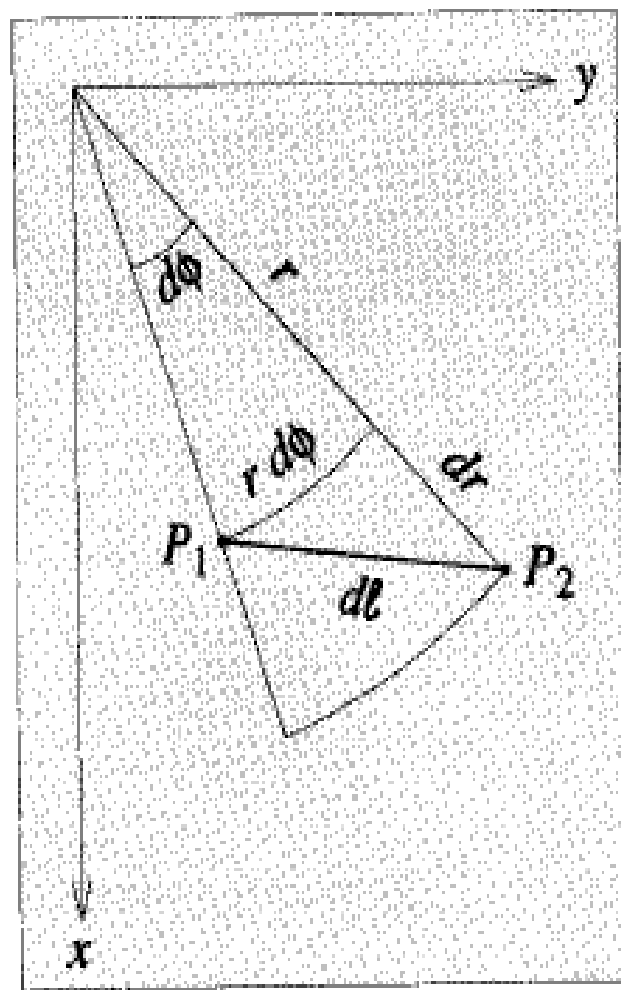
linea mundial es la coneccion mas corta entre dos eventos

distancia propria entre dos eventos: distancia que tienen dos eventos simultaneos, para el diferencial

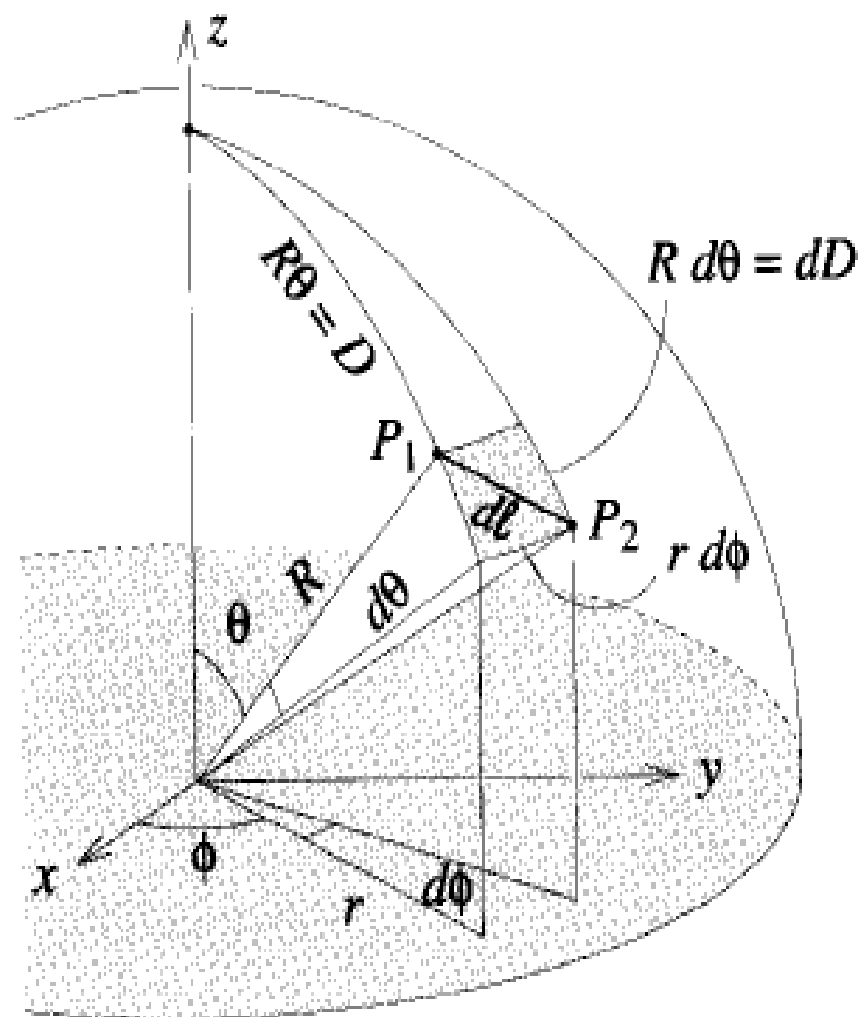
$$dt = 0 \rightarrow ds_p = \sqrt{-(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$$

d_p no imaginario, por ejemplo en un Universo plano:

$$d_p = R(t) \cdot r_{comovil}$$



(a)



(b)

usando coordenadas polares escribimos para una distancia diferencial en la superficie de un globo

$$dl^2 = (R d\theta)^2 + (r d\phi)^2$$

pero como $r = R \sin \theta \rightarrow dr = R \cos \theta d\theta$

$$R d\theta = \frac{dr}{\cos \theta} = \frac{R dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{dr}{\sqrt{1 - r^2/R^2}}$$

insertar en la expresion para dl^2

$$dl^2 = \left(\frac{dr}{\sqrt{1 - r^2/R^2}} \right)^2 + (r d\phi)^2$$

con $K = 1/R^2$ y transicion a coordenadas esfericas en 3 dimensiones (cambio de significancia de r , que ahora es la distancia del centro)

$$dl^2 = \left(\frac{dr}{\sqrt{1 - K r^2}} \right)^2 + (r d\theta)^2 + (r \sin \theta d\phi)^2$$

ahora hacemos la transición al espacio-tiempo, simplemente

$$ds^2 = (cdt)^2 - dl^2$$

porque en un Universo homogéneo, el tiempo pasa igualmente en todas las partes

entonces

$$ds^2 = (cdt)^2 - dl^2 = (cdt)^2 - \left(\frac{dr}{\sqrt{1 - K r^2}} \right)^2 - (r d\theta)^2 - (r \sin \theta d\phi)^2$$

estos r 's significan distancias propias

queremos tener una expresión en términos de factor de escala
y expresamos la curvatura en los mismos términos

traslacion al factor de escala

$$\boldsymbol{r} = R(t) \cdot \boldsymbol{r}_{comovil}$$

con K como

$$K = \frac{k}{R^2(t)}$$

tenemos una constante k con la curvatura dependiendo del factor de escala

entonces

$$ds^2 = (cdt)^2 - R^2(t) \left(\frac{dr}{\sqrt{1 - k r_{com}^2}} \right)^2 - (r_{com} d\theta)^2 - (r_{com} \sin \theta d\phi)^2$$

la metrica de Robertson-Walker para un Universo homogenio y isotropico

es la metrica mas general

5.3 Aplicaciones

determinando la distancia propia a un objeto --> integrando sobre la metrica para eventos simultaneos ($c*dt=0$)

libertad en el sistema de coordenadas: observador en el centro y medir distancias a lo largo de lineas con $d\theta=0$ y $d\phi=0$

$$l = \int_0^{r_c} ds = R \int_0^{r_c} \frac{dr_c}{\sqrt{1 - k r_c^2}}$$

para $k=0$ simplemente

$$l = R(t) r_c$$

para $k > 0$ (curvatura positiva)

$$l = R(t) \frac{1}{\sqrt{k}} \arcsin(r_c \sqrt{k})$$

para $k < 0$ (curvatura negativa)

$$l = R(t) \frac{1}{\sqrt{|k|}} \operatorname{arsinh}(r_c \sqrt{|k|})$$

entonces: con respecto a un Universo plano, las distancias propias son

- a) mas largas en un Universo con curvatura positiva
- b) mas cortas en un Universo con curvatura negativa

observacion: para $k > 0$, $\frac{1}{\sqrt{1 - k r_c^2}}$ se vuelve imaginario

si $r_c = \frac{1}{\sqrt{k}}$ ---> hay un r_c maximo

solucion de r_c muestra explicitamente

$$r_c = \frac{1}{\sqrt{k}} \sin \left(l(t) \frac{\sqrt{k}}{R(t)} \right)$$

muestra que un Universo con $k > 0$ es finito. Volumen?

es posible viajar alrededor del Universo?

caso simple: solo materia y ninguna constante cosmologica

---> solucion Newtoniana

$$R(t) = \frac{4\pi G \rho_0}{3kc^2} (1 - \cos(x))$$

$$t = \frac{4\pi G \rho_0}{3k^{3/2} c^3} (x - \sin(x))$$

$$R(t) = R_{\max} \text{ ----> } x = \pi/2$$

$$ct_{\max} = \frac{R_{\max}}{\sqrt{k}} (\pi/2 - 1) = r_{c, \max} (\pi/2 - 1) < r_{c, \max}$$

----> no es posible para luz y de ninguna manera para otras particulas

5. 4 Distancia de luminosidad y distancia angular

hasta ahora: distancias como conceptos teoricos , pero practicamente necesitamos **medir** distancias

distancia propia no es medible directamente (porque no?)

astronomia mide distancias por aplicacion de escalas estandard (angulos) o luminosidades estandard

en la cosmologia, no es tan simple: distancias tienen su sentido solo en el contexto de los parametros cosmologicas

normalmente, una distancia usando luminosidades esta definido por

$$d^2 = \frac{L}{4\pi F}$$

siendo L la luminosidad conocida y F el flujo medido

en la metrica RW, el flujo tambien comporta como

$$r_c^2 \sim \frac{L}{4\pi F} \quad \text{siendo } r_c = r_{\text{comovil}}$$

la expansion agrega dos efectos:

- 1) enrojecimiento --> perdida de energia de fotones
--> $1+z$
- 2) dilatacion del tiempo --> otro factor $1+z$

entonces

$$r_c^2 (1+z)^2 = \frac{L}{4\pi F}$$

con la **distancia de luminosidad**:

$$d_L = r_c (1+z)$$

la distancia comovil puede ser encontrado por integracion de la metrica RW:

para un rayo de luz $ds = 0$

$$\int_{t_e}^{t_0} c \frac{dt}{R} = \int_0^{r_c} \frac{dr'_c}{\sqrt{1 - k r'^2_c}} \quad \text{limites del integral!}$$

lado derecho: $\frac{1}{\sqrt{k}} \arcsin(r_c \sqrt{k})$ para $k > 0$

r_c

para $k = 0$

$$\int_{t_e}^{t_0} c \frac{dt}{R} = \int_0^{r_c} \frac{dr'_c}{\sqrt{1 - k r'^2_c}} \quad \text{para } k < 0$$

lado izquierda:
$$\int_{t_e}^{t_0} c \frac{dt}{R} = \int_{t_e}^{t_0} \frac{c}{R} \frac{dR}{dR} dt = c \int_{R_e}^1 \frac{dR'}{R'^2 H}$$

$$R^2 H = H_0 \sqrt{\Omega_{rad} + R \Omega_m + R^2 (1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda) + R^4 \Omega_\Lambda}$$

entonces: calcular la distancia de luminosidad en dependencia de enrojecimiento:

- 1) asume un modelo cosmologico
- 2) transformar enrojecimiento $z \rightarrow R = 1/(1+z)$
- 3) calcula el integral arriba
- 4) usa lado derecho por calcular r_c

complicado $\rightarrow$ descrito analiticamente solo con simplificaciones

si queremos la constante k, siempre el mismo valor --> para hoy dia

$$k = \left(\frac{H_0}{c} \right)^2 (\Omega_0 - 1)$$

simplificar: plano, vacio=0, radiacion=0

$$R^2 H = H_0 \sqrt{R}$$

entonces

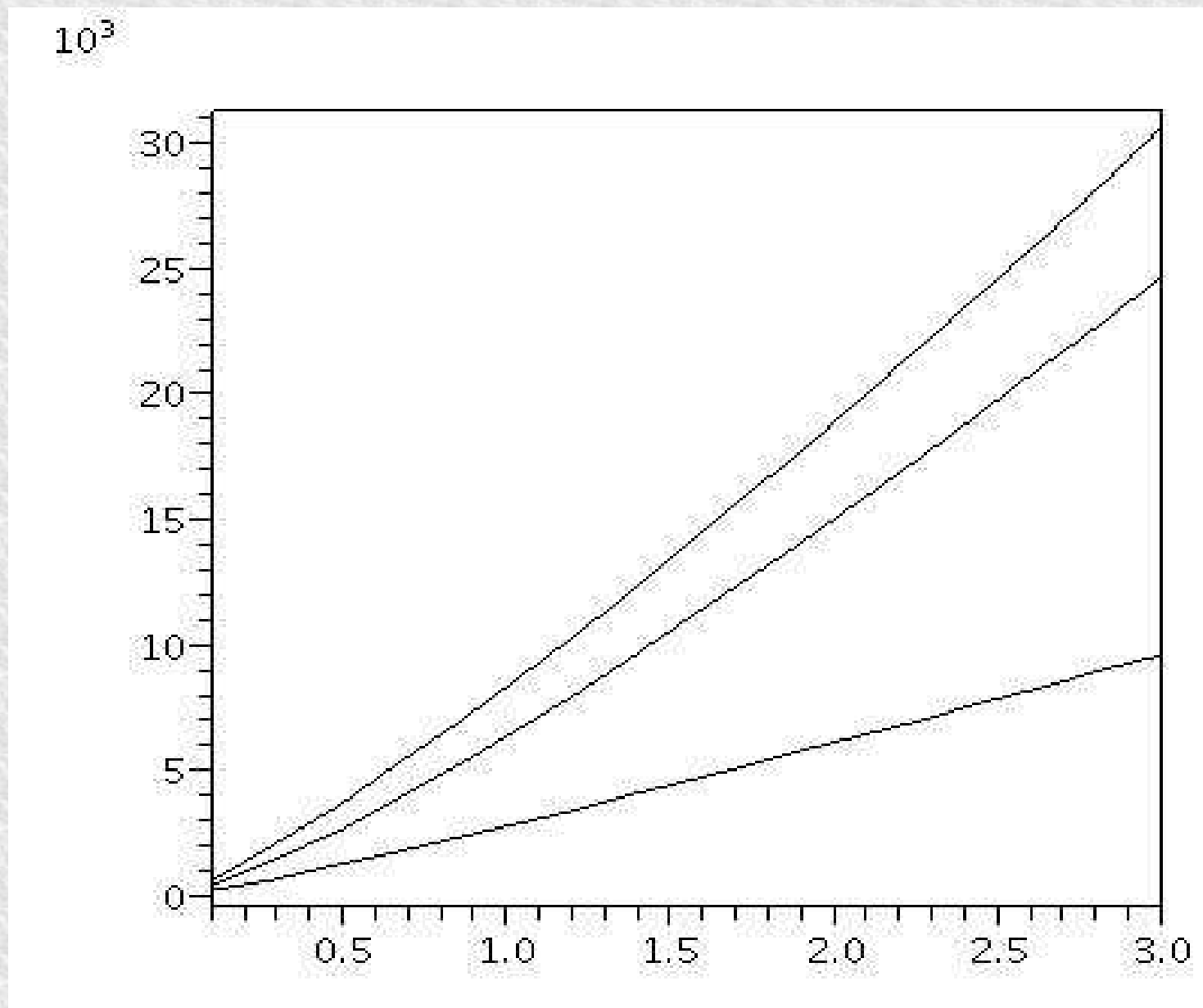
$$c \int_{R_e}^1 \frac{dR'}{H_0 \sqrt{R}} = \frac{2c}{H_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}} \right) = r_c$$

generalmente: calculadoras cosmologicas

por ejemplo: www.astro.ucla.edu/-wright/CosmoCalc.html

distancias de luminosidad:

Mpc



Ω_m, Ω_Λ

0.5,0.2

0.3,0.7

1.9,0.2

z

otro metodo de medir distancias es de usar angulos
(paralaje trigonometrica, paralaje de corrientes estelares, metodo
Baade-Wesselink con Cefeidas)

en un espacio plano, sin expansion $r = \frac{R}{\omega}$ siendo R el diametro
lineal de un objeto y ω su diametro angular

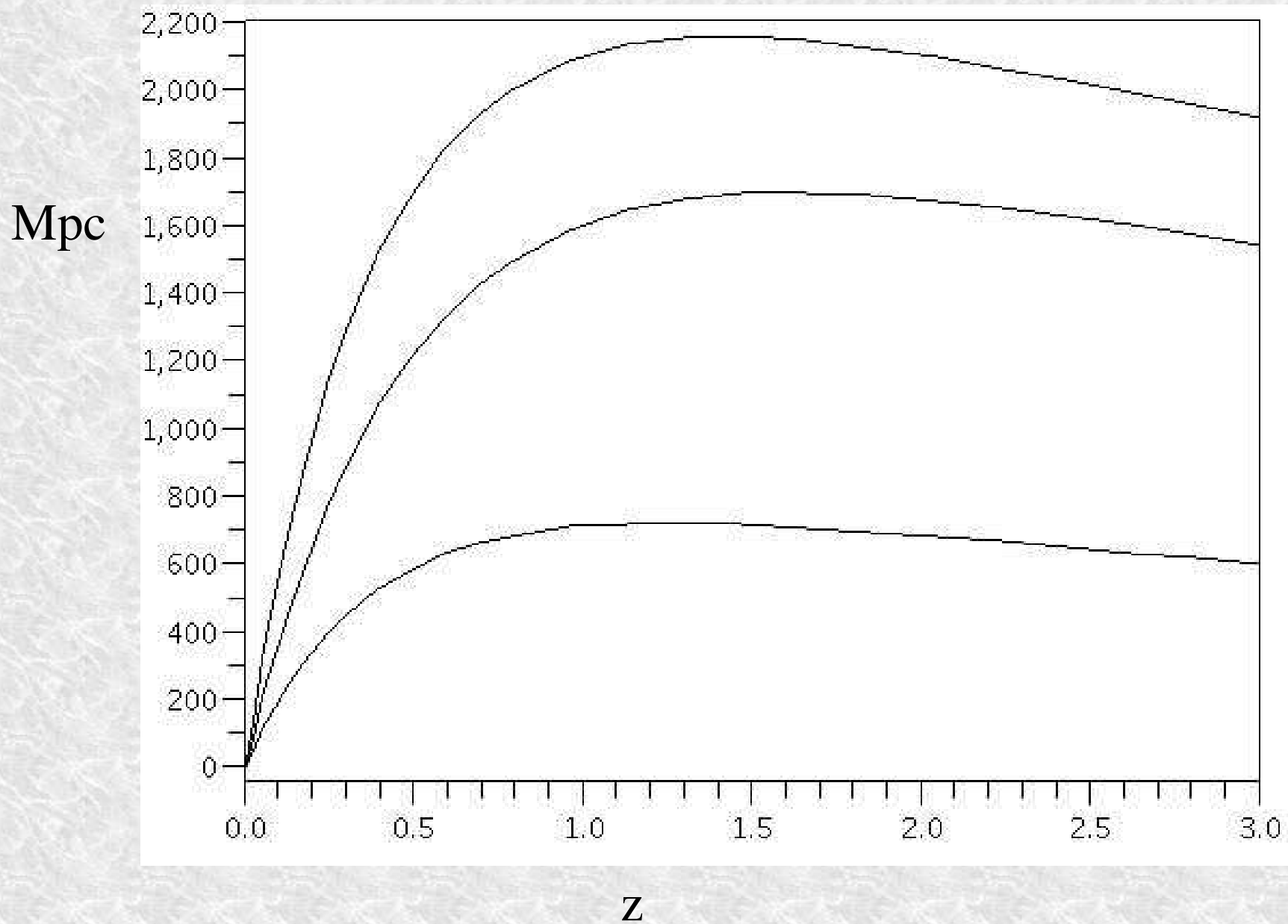
pero con expansion vemos un objeto como aparecio cuando la luz
estaba emitido

$$r = r_e = d_A = R_e(t) \cdot r_c = \frac{1}{1+z} r_c$$

entonces, la **distancia angular** es

$$d_A = \frac{1}{1+z^2} d_L$$

distancias angulares para los mismos parametros

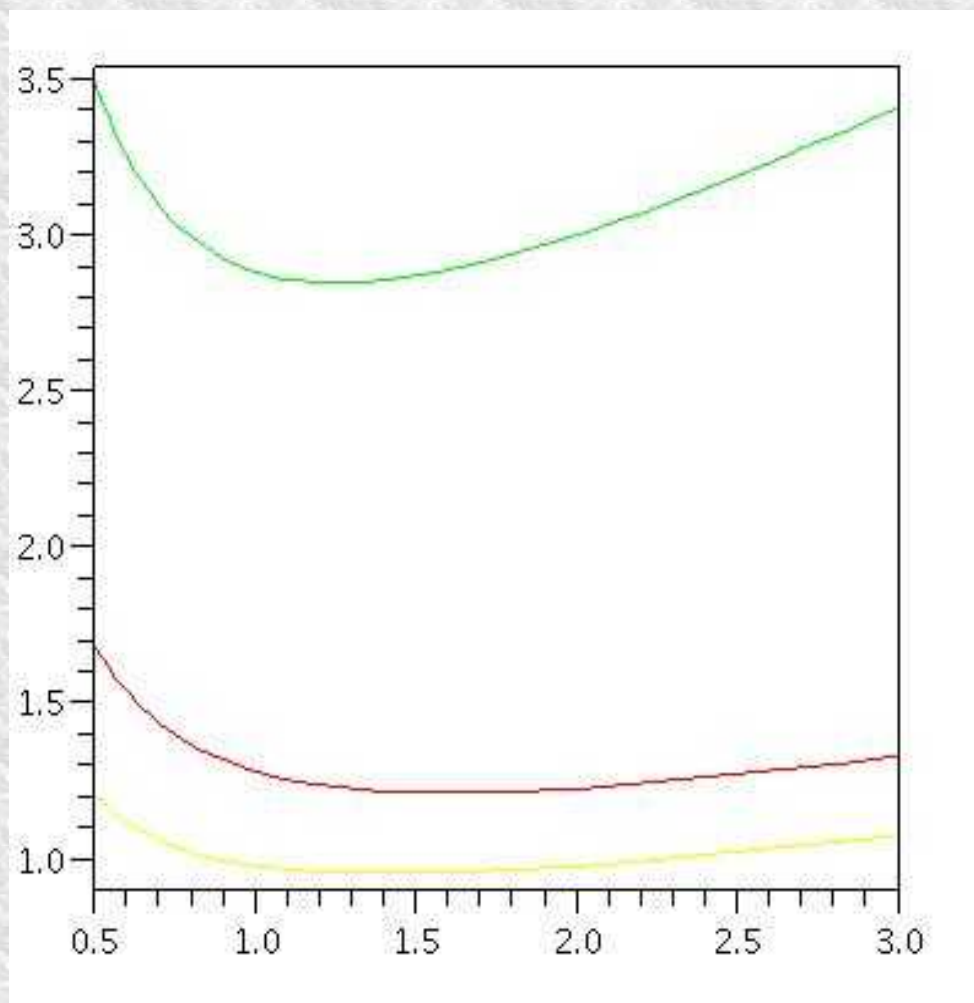


distancias angulares se vuelven mas pequeñas con el enrojecimiento aumentando!!

$$\Omega_m, \Omega_\Lambda$$

$$0.5, 0.2$$

arcsec



$$0.3, 0.7$$

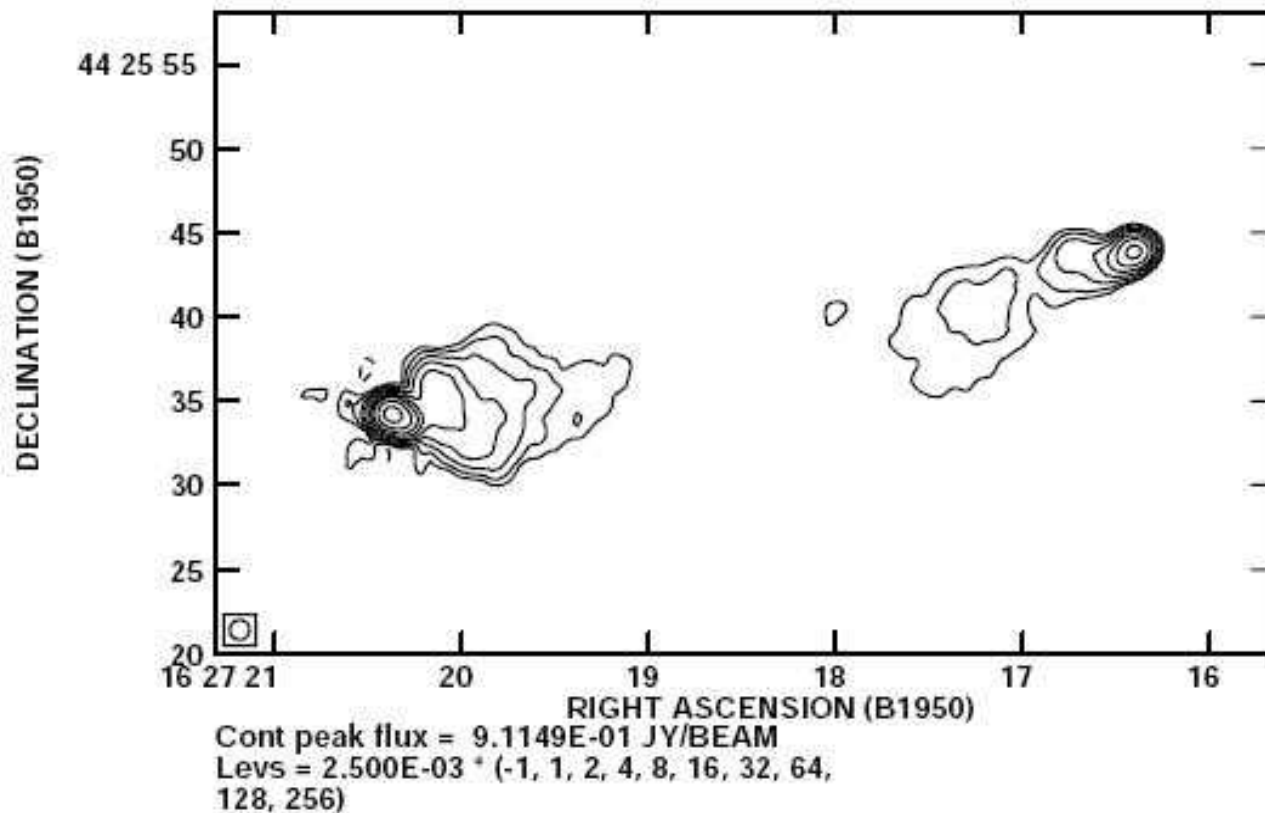
$$1.9, 0.2$$

z

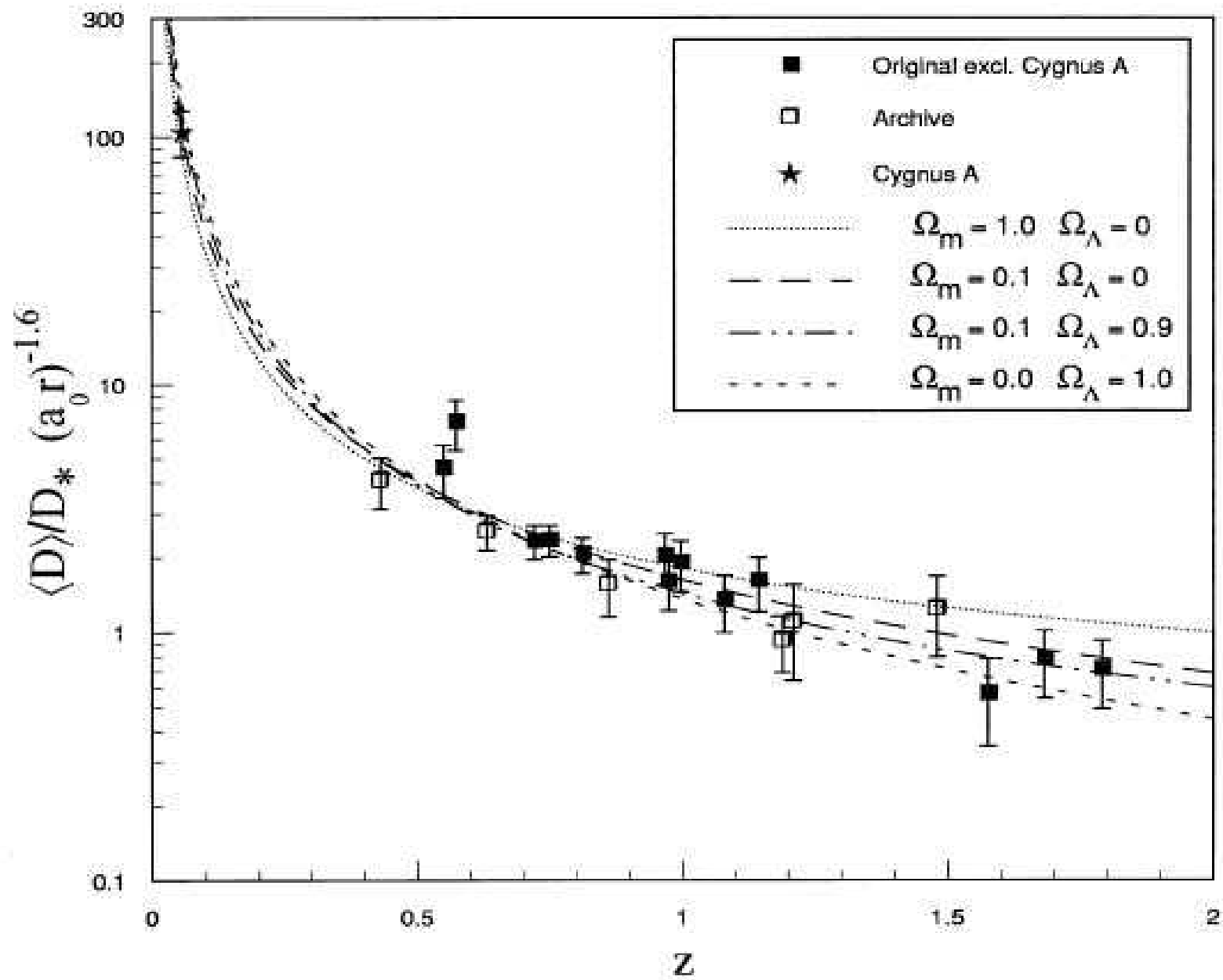
galaxia con diametro de 10 kpc (Universo plano)

estandard – "radio lobes" producido por un nucleo galactico activo
separacion de lobes no constante, pero por luminosidad conocido y
asumir densidad del medio intergalactico ---> parametro "hibrido" cte.

fuente: 3C 337 instrumento: Very Large Array



separacion
tipicamente 100 kpc



Sumario de las distancias

distancia comovil (distancia de coordenadas)
no participa en la expansion

distancia propia $r_p = R(t) \cdot r_c$

distancia de luminosidad $d_L = (1 + z) \cdot r_c$

distancia angular $d_A = \frac{1}{(1 + z)} \cdot r_c$